INFINITE ABELIAN GROUPS

László Fuchs

Tulane University
New Orleans, Louisiana

VOLUME I

Academic Press
New York and London
1970

Л. Фукс

БЕСКОНЕЧНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

т. 1

Перевод с английского
А. П. МИШИНОЙ

Издательство «Мир»
Москва 1974

УДК 519.443

Известный математнк Ласло Фукс уже знаком советскому читателю по русскому переводу его книги «Частично упорядоченные алгебраические системы» («Мир», 1965). Его новая двухтомная монографня посвящена абелевым группам. Первый том включает в себя все основополагающие результаты теорин, а также ее гомологический аспект. В нем поставлено 50 нерешенных проблем. Книга заполняет существенный пробел в математической лнтературе по этому вопросу на русском языке. От читателя не требуется специальных знаний, что позволяет использовать книгу и для первого знакомства с общей алгеброй.

Книга полезна каждому математику, работающему в теорин групп, теории модулей и колец, топологии, гомологической алгебре.

Редакция литературы по математическим наукам

Ф $\frac{20203-385}{041(01)-74}$ 20—73

Предисловие к русскому изданию

Уже давно сложилась несколько парадоксальная ситуация, когда теория абелевых групп лишь формально является частью теории групп. Как методы, так и результаты, относящиеся к абелевым группам, как правило, не связаны с общей теорией групп. Первым формальным актом, фиксирующим такое положение, можно считать выход в 1954 г. небольшой книги И. Капланского «Бесконечные абелевы группы» (в 1969 г. появилось второе издание). С другой стороны, как отмечал в свое время А. Г. Курош, «около 1952 г. в теории абелевых групп развернулась активная работа венгерских алгебраистов, а в 1958 г. вышла богатая содержанием книга Фукса». Здесь А. Г. Курош имел в виду первое издание монографии, представляемой ныне вниманию русского читателя.

Трудно переоценить влияние, оказанное на развитие теории абелевых групп вышеупомянутой книгой. Будучи своеобразной энциклопедией этой теории, она, кроме того, содержала большое число проблем, с решением которых связана деятельность многих специалистов. Но есть и другая книга, оказавшая на становление современной теории абелевых групп решающее влияние, это — «Гомологическая алгебра» Картана и Эйленберга, вышедшая в 1956 г. (русский перевод в 1960 г.).

Бурное развитие теории модулей и проникновение в математику теоретико-категорного мышления, последовавшие за появлением этой монографии, нашли глубокое отражение в теории абелевых групп. Достигло полной отчетливости сознание, что абелева группа — это модуль над кольцом целых чисел. В частности, отсюда следует, что для абелевой группы справедливы все результаты общей теории модулей. Таким образом, одним из важных направлений в теории абелевых групп является углубление теоретико-модульных результатов, использующее специфику кольца целых чисел. (Сказанное, конечно, не отрицает обратного влияния, нашедшего свое отражение, например, в монографии А. П. Мишиной и Л. А. Скорнякова «Абелевы группы и модули».)

Эта тенденция, ярко проявившаяся в литературе последнего десятилетия, заставила Фукса написать, по существу, новую книгу. Почти сохранилось заглавие («Бесконечные абелевы группы» вместо «Абелевы группы»), остались прежними названия глав (за исключением двух). Но уже в первой главе можно видеть параграфы «Отображения и диаграммы», «Модули», «Категории абелевых групп», «Функторные под-

группы...». И такие гомологически звучащие названия пронизывают всю книгу. Так, во второй главе имеем «Коуниверсальный и универсальный квадраты», в четвертой — «Инъективные группы», в пятой — «Сервантно точные последовательности», в седьмой — «Сервантно существенные расширения», в восьмой — «Точные последовательности для Hom», в девятой — «Функтор Pext», в десятой — «Точные последовательности для функтора Tor». Таким образом, открыто признается, что теория абелевых групп является частью теории модулей, и можно надеяться, что это пойдет на пользу обоим направлениям.

Важно подчеркнуть, что, нарядив теорию в новую одежду, автор сумел сохранить основные достоинства своей первой книги — доступность изложения, многочисленные упражнения, интересные проблемы. Уже и в первом томе как специалисты по абелевым группам и модулям, так и «потребители» этих теорий найдут много интересного и полезного. А после осуществления перевода второго тома (L. Fuchs «Infinite abelian groups», v. II, Academic Press, 1973) советский читатель будет располагать весьма полной энциклопедией по теории абелевых групп. Заметим еще, что новейшие достижения теории абелевых групп отражены в обзорах А. П. Мишиной («Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965», М., 1967, стр. 9—44; «Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия», т. 10, М., 1972, стр. 5—45).

Л. А. Скорняков

Предисловие

Теория абелевых групп — это ветвь алгебры, в которой рассматриваются коммутативные группы. Любопытно, что она до некоторой степени не зависит от общей теории групп: ее основные идеи и методы имеют лишь незначительное сходство с некоммутативным случаем, и есть основания полагать, что не существует другого условия, которое имело бы большее значение для групповой структуры, чем коммутативность.

Настоящая книга посвящена теории абелевых групп. Изучение теории абелевых групп целесообразно по двум основным причинам: во-первых, из-за красоты результатов — среди них находятся некоторые из лучших примеров того, что называется алгебраической структурной теорией; во-вторых, потому, что это один из основных побудителей новых исследований по теории модулей (например, для всякой теоремы об абелевых группах можно поставить вопрос: для модулей над какими кольцами верен этот результат?); имеются и другие области математики, в которых широкое применение теории абелевых групп может быть очень плодотворным (строение групп гомологий и т. д.).

Первоначальным намерением автора было подготовить второе издание его книги «Абелевы группы» (Будапешт, 1958). Однако скоро стало очевидным, что в последнее десятилетие теория абелевых групп развивалась слишком быстро, чтобы можно было ограничиться простым пересмотром издания, и поэтому была написана совсем новая книга, отражающая новый аспект теории. Некоторые темы (структура подгрупп, разложение в прямую сумму подсистем и т. д.), которые рассматривались в книге «Абелевы группы», здесь не будут затрагиваться.

Две параллельные задачи этой книги — ознакомить подготовленных студентов с теорией абелевых групп и дать молодому алгебраисту обзор материала (в разумном объеме), который может послужить основой для исследований по абелевым группам. Изложение никоим образом не претендует на исчерпывающий характер или даже на то, чтобы дать полное представление о современном состоянии теории — это было бы сизифовым трудом, так как теория абелевых групп стала крайне обширной и продолжает расти практически изо дня в день. Но то, что автор рассматривает как основную часть сегодняшней теории абелевых групп, он пытался изложить по возможности полно, чтобы читатель мог получить достаточно сведений о центральных идеях, основных результатах и главнейших методах теории. Чтобы помочь

в этом читателю, текст сопровождается многочисленными упражнениями; некоторые из них являются просто упражнениями, другие дают дополнительные сведения по теории, содержат различные добавления. Упражнения используются лишь в других упражнениях, но читателю рекомендуется попробовать выполнить некоторые из них, чтобы лучше осмыслить теорию. От читателя не требуется никаких предварительных знаний, кроме элементов абстрактной алгебры, теории множеств и топологии, но требуется определенная математическая зрелость.

Выбор материала неизбежно несколько субъективен. Главный упор делается на структурные проблемы; должное место отводится гомологическим вопросам и некоторым топологическим рассмотрениям. Была сделана серьезная попытка унифицировать методы, упростить изложение и сделать его по возможности независимым. Автор пытался избежать излишней абстрактности или технической сложности изложения. Из-за этого в книгу не вошли некоторые важные результаты, а изложение (в тех местах, где это неизбежно вызвало бы потерю ясности или множество технических осложнений) велось не в максимально возможной общности.

В томе 1 излагаются основы теории абелевых групп, а также ее гомологический аспект, в то время как том 2 посвящен структурной теории и приложениям. В каждом томе имеется библиография, содержащая те работы по абелевым группам, на которые имеются ссылки в тексте. Автор старался везде указывать, кому принадлежит тот или иной результат. В некоторых случаях, однако (особенно в упражнениях), было почти невозможно приписать идеи их первооткрывателям. В конце каждой главы приводятся комментарии, указываются дальнейшие пути, по которым шло исследование, упоминаются некоторые дополнительные результаты и обобщения, в частности на модули, которые могут заинтересовать читателя. Приведены также нерешенные проблемы, которые автор считал интересными.

Система ссылок внутри книги достаточно ясна. Конец доказательства отмечается символом ∎. Задачи, которые по той или иной причине казались автору трудными, часто отмечены звездочкой, как, впрочем, и некоторые разделы, которые начинающий читатель может счесть разумным пропустить.

Автор многим обязан специалистам по теории групп за сделанные ими замечания; всех их автор искренне благодарит. Особенно он благодарен Шарлю за многочисленные полезные советы. Автор хотел бы выразить свою признательность математическим отделениям университетов в Майами (Корэл Гейбл, Флорида) и в Тулейне (Новый Орлеан, Луизиана) за их помощь в подготовке рукописи, а также издательству «Academic Press» за публикацию этой книги в своей замечательной серии «Pure and Applied Mathematics».

Л. Фукс

Глава I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Основная цель этой вводной главы — ознакомить читателя с терминологией и основными фактами, касающимися абелевых групп, которые будут часто использоваться в дальнейшем. Некоторые доказательства мы пропустим, так как они стандартны и их можно найти в любых руководствах по алгебре или теории групп. Здесь кратко будут рассмотрены основные типы групп и их важнейшие свойства. Мы введем ряд обозначений, что позволит в дальнейшем избежать множества повторений. Отображения, диаграммы, категории и функторы также будут здесь рассматриваться; они играют важную роль в нашем изложении. Будет также дан обзор некоторых из важнейших топологий в абелевых группах.

Читатель, не слишком близко знакомый с излагаемым предметом, должен прочесть эту главу особенно внимательно.

§ 1. Определения

Абелевы группы, как и другие алгебраические системы, определяются на множествах. Но в теории абелевых групп отдельные теоретико-множественные особенности множеств, на которых определены группы, по-видимому, играют значительно более важную роль, чем в других частях алгебры. Поэтому нам часто придется использовать кардинальные и порядковые числа и некоторые результаты теории множеств. Тем не менее мы не будем рассматривать теоретико-множественных основ теории абелевых групп. Мы примем аксиомы Гёделя — Бернея теории множеств, включая *аксиому выбора*, которую мы будем главным образом использовать в эквивалентной форме, называемой *леммой Цорна*.

Пусть P — частично упорядоченное множество, т. е. множество с бинарным отношением $\leqslant$, обладающее следующими свойствами: $a \leqslant a$; если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$; если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$ для любых a, b, $c \in P$. Подмножество C множества P называется *цепью*, если при a, $b \in C$ всегда или $a \leqslant b$, или $b \leqslant a$. Элемент $u \in P$ называется *верхней границей* подмножества C, если $c \leqslant u$ для всех $c \in C$. Говорят, что множество P *индуктивно*, если каждая цепь из P имеет в P верхнюю границу. Элемент $v \in P$ называется *максимальным* в P, если из $v \leqslant a$, где $a \in P$, вытекает $a = v$.

Лемма Цорна. *Если частично упорядоченное множество индуктивно, то оно содержит максимальный элемент.*

Всякий раз, когда это будет нужно, мы будем предполагать также выполненной гипотезу континуума; этот факт будет всегда специально оговариваться.

Термины *класс* и *множество* будут употребляться в их обычном для теории множеств смысле. Мы будем говорить «семейство» или «система», если не исключается повторное использование одного и того же элемента. Будут употребляться обычные условные обозначения теории множеств [см. список обозначений на стр. 326], за исключением того, что мы будем писать $\alpha: a \mapsto b$, если α — функция, которая отображает элемент a некоторого класса [множества] A в элемент b класса [множества] B, в то время как $\alpha: A \to B$ будет означать, что α — функция, отображающая класс [множество] A в класс [множество] B.

Слово «группа» везде будет обозначать аддитивно записанную абелеву [т. е. коммутативную] группу. Это значит, что под *группой* понимается множество A, где любой паре элементов $a, b \in A$ поставлен в соответствие элемент $a + b$ из A, называемый *суммой* элементов a и b; существует такой элемент $0 \in A$, *нуль*, что $a + 0 = a$ для каждого $a \in A$; для всякого $a \in A$ существует $x \in A$ со свойством $a + x = 0$, причем элемент $x = -a$ называется *обратным* к элементу a; наконец, выполняются законы ассоциативности и коммутативности:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad a + b = b + a$$

для любых $a, b, c \in A$.

Заметим, что группа никогда не бывает пустым множеством, так как она содержит нуль, и что в равенстве $a + b = c$ любые два из элементов a, b, c однозначно определяют третий элемент. Закон ассоциативности позволяет писать сумму более чем двух элементов без скобок, а в силу коммутативности члены суммы можно переставлять. Для краткости пишут $a - b$ вместо $a + (-b)$; таким образом, $-a - b$ есть обратный элемент для $a + b$. Сумма $a + \ldots + a$ [n слагаемых] сокращенно записывается в виде na, а $-a - \ldots -a$ [n слагаемых] — в виде $(-n)a$ или $-na$. Сумма без членов равна нулю; в соответствии с этим $0a = 0$ для всех $a \in A$ [заметим, что мы одинаковым образом обозначаем целое число 0 и элемент группы 0]. Элемент na, где n — целое число, называется *кратным* элементу a.

Мы будем обозначать одним и тем же символом группу и можество ее элементов. *Порядком* группы A назовем мощность $|A|$ множества ее элементов. Если мощность $|A|$ конечна [счетна], группа A называется *конечной* [*счетной*].

Подмножество B группы A называется *подгруппой*, если элементы множества B образуют группу при том же правиле сложения, что и в A. Если группа A конечна, то по теореме Лагранжа $|B|$ — делитель $|A|$. Подгруппа группы A всегда содержит нуль группы A, и непустое подмножество B группы A является подгруппой тогда и только тогда, когда из $a, b \in B$ следует, что $a + b \in B$, и из $a \in B$ следует, что $-a \in B$, или, проще, тогда и только тогда, когда из $a, b \in B$ вытекает включение $a - b \in B$. *Тривиальные* подгруппы группы A — это сама группа A и подгруппа, состоящая только из нуля; последняя подгруппа тоже будет обозначаться через 0, так как это не может вызвать недоразумений. Подгруппа группы A, отличная от A, называется *собствен-*

ной подгруппой группы A. Мы будем писать $B \subseteq A$ [$B \subset A$], если B — подгруппа [собственная подгруппа] группы A.

Если $B \subseteq A$ и $a \in A$, то множество $a + B = \{a + b \mid b \in B\}$ называется *смежным классом группы A по подгруппе B*. Напомним, что

1) $b \mapsto a + b$ — взаимно однозначное соответствие между B и $a + B$;

2) элементы $a_1, a_2 \in A$ лежат в одном смежном классе по подгруппе B тогда и только тогда, когда $a_1 - a_2 \in B$; в этом случае можно писать $a_1 \equiv a_2 \mod B$ и говорить, что a_1 и a_2 *конгруэнтны по модулю B*;

3) два смежных класса или совпадают, или не пересекаются;

4) A является теоретико-множественным объединением попарно не пересекающихся смежных классов группы A по подгруппе B.

Элемент смежного класса называется *представителем* этого смежного класса. Множество, состоящее из представителей, выбранных ровно по одному из каждого смежного класса по подгруппе B, называется *полной системой представителей* смежных классов по подгруппе B. Его мощность, т. е. мощность множества различных смежных классов по подгруппе B, называется *индексом* подгруппы B в группе A и обозначается через $| A : B |$. Индекс может быть конечным или бесконечным; в первом случае говорят, что B — *подгруппа конечного индекса* в A. Если группа A конечна, то $| A : B | = | A | : | B |$.

Смежные классы группы A по подгруппе B образуют группу A/B, известную под названием *факторгруппы* группы A по подгруппе B. В A/B сумма двух элементов C_1, C_2 [которые являются смежными классами группы A по подгруппе B] определяется как смежный класс C, содержащий множество $\{c_1 + c_2 \mid c_1 \in C_1,\ c_2 \in C_2\}$; на самом деле это множество само является смежным классом и, таким образом, совпадает с C. Нулевым элементом в A/B служит подгруппа B [рассматриваемая как смежный класс], а обратным к смежному классу C_0 — смежный класс $-C_0 = \{-c \mid c \in C_0\}$. Если $B \neq 0$, то A/B называется *собственной* факторгруппой группы A.

Мы часто будем использовать естественное взаимно однозначное соответствие между подгруппами факторгруппы $A^* = A/B$ и подгруппами группы A, содержащими подгруппу B. Элементы из A, входящие в элементы [т. е. смежные классы группы A] некоторой подгруппы C^* группы A^*, образуют такую подгруппу C, что $B \subseteq C \subseteq A$. С другой стороны, если $B \subseteq C \subseteq A$, то смежные классы группы A по подгруппе B, содержащие хотя бы один элемент из C, образуют подгруппу C^* группы A^*. Этим путем устанавливается соответствие между C и C^*, причем $C^* = C/B$. Заметим, что $| C^* | = | C : B |$, а $| A^* : C^* | = | A : C |$.

Теоретико-множественное пересечение $B \cap C$ двух подгрупп B, C группы A снова является подгруппой группы A. Более общо, если B_i — семейство подгрупп группы A, то пересечение этих подгрупп $B = \bigcap_i B_i$ также является подгруппой в A. Условимся считать, что $B = A$, если i пробегает пустое множество.

Если S — подмножество в A, то символом $\langle S \rangle$ будем обозначать подгруппу группы A, *порожденную* множеством S, т. е. пересечение всех подгрупп группы A, содержащих S. Если S состоит из элементов a_i ($i \in I$), то будем также писать

$$\langle S \rangle = \langle \ldots, a_i, \ldots \rangle_{i \in I}$$

или просто $\langle S \rangle = \langle a_i \rangle_{i \in I}$. Подгруппа $\langle S \rangle$ состоит из всех сумм вида $n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k$ [называемых *линейными комбинациями* элементов $a_1, \ldots, a_k$], где $a_i \in S$, n_i — целые числа, k — неотрицательное целое число. Если S пусто, то $\langle S \rangle = 0$. Если $\langle S \rangle = A$, то будем говорить, что S — *система образующих* группы A, а элементы из S — *образующие* группы A. Будем называть группу *конечно порожденной*, если она имеет конечную систему образующих. Заметим, что $\langle S \rangle$ и S имеют одинаковую мощность, кроме случая, когда S конечно; в этом случае подгруппа $\langle S \rangle$ конечна или счетна.

Если B и C — подгруппы группы A, то подгруппа $\langle B, C \rangle$, которую они порождают, состоит из всех элементов группы A вида $b + c$, где $b \in B$, $c + C$. Поэтому мы можем написать $\langle B, C \rangle = B + C$. Для, быть может, бесконечного набора подгрупп B_i группы A порожденная ими подгруппа B состоит из всевозможных конечных сумм $b_{i_1} + \ldots + b_{i_k}$, где b_{i_j} принадлежит некоторой подгруппе B_{i_j}; в этом случае мы будем писать $B = \sum_{i \in I} B_i$

Группа $\langle a \rangle$ называется *циклической* группой, порожденной элементом a. Порядок группы $\langle a \rangle$ называется также *порядком* элемента a и обозначается через $o(a)$. Таким образом, порядок $o(a)$ — это или положительное целое число, или символ ∞. Если $o(a) = \infty$, то все кратные na элемента a ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) различны, и ими исчерпывается группа $\langle a \rangle$, а если $o(a) = m$ — положительное целое число, то $0, a, \ldots, (m-1)a$ — это различные элементы группы $\langle a \rangle$, и $ra = sa$ тогда и только тогда, когда $m \mid r - s$.

Если каждый элемент группы A имеет конечный порядок, то A называется *периодической* группой, а если все элементы группы A, кроме нуля, имеют бесконечный порядок, то A называется группой *без кручения*, *Смешанные* группы содержат как ненулевые элементы конечного порядка, так и элементы бесконечного порядка. *Примарной группой*, или *p-группой*, называется группа, порядки элементов которой являются степенями фиксированного простого числа p.

Теорема 1.1. *Множество T всех элементов конечного порядка группы A является подгруппой группы A. При этом T — периодическая группа, а факторгруппа A/T — группа без кручения.*

Так как $0 \in T$, множество T не пусто. Если $a, b \in T$, т. е. $ma = 0$ и $nb = 0$ для некоторых положительных целых чисел m, n, то $mn(a - b) = 0$ и, таким образом, $a - b \in T$, т. е. T — подгруппа. Чтобы показать, что A/T — группа без кручения, предположим, что смежный класс $a + T$ имеет конечный порядок, т. е. $m(a + T) \subseteq T$ при неко-

тором $m > 0$. Тогда $ma \in T$ и существует такое $n > 0$, что $n(ma) = 0$. Следовательно, элемент a имеет конечный порядок, $a \in T$ и $a + T = T$ — нуль группы A/T. ∎

Подгруппу T мы будем называть *максимальной периодической подгруппой* или *периодической частью* группы A и обозначать через $T(A)$. Заметим, что если B — периодическая подгруппа группы A, то $B \subseteq T$, а если $C \subseteq A$ и A/C — группа без кручения, то $T \subseteq C$.

Для группы A и целого числа $n > 0$ положим

$$nA = \{na \mid a \in A\}$$

и

$$A[n] = \{a \mid a \in A,\ na = 0\}.$$

Таким образом, $g \in nA$ в том и только в том случае, когда уравнение $nx = g$ имеет решение x в A, и $g \in A[n]$ тогда и только тогда, когда $o(g) \mid n$. Очевидно, nA и $A[n]$ — подгруппы группы A.

Если a — элемент порядка p^k, где p — простое число, то будем называть число k *экспонентой* элемента a и писать $e(a) = k$. Если $a \in A$, то наибольшее неотрицательное целое число r, для которого уравнение $p^r x = a$ имеет решение $x \in A$, назовем *p-высотой* $h_p(a)$ элемента a. Если уравнение $p^r x = a$ имеет решение при любом r, то a называется элементом *бесконечной p-высоты*, $h_p(a) = \infty$. Нуль имеет бесконечную высоту по любому простому числу. Если из контекста будет ясно, о каком простом числе p идет речь, то будем называть $h_p(a)$ просто *высотой* элемента a и писать $h(a)$.

Цоколем $S(A)$ группы A называется множество всех таких элементов $a \in A$, что $o(a)$ — число, не делящееся на квадрат. $S(A)$ — подгруппа группы A; она является нулевой тогда и только тогда, когда A — группа без кручения, и совпадает с A тогда и только тогда, когда A — *элементарная* группа в том смысле, что всякий элемент из A имеет порядок, не делящийся на квадрат. Для p-группы A имеем $S(A) = A[p]$.

Множество всех подгрупп группы A частично упорядочено относительно включения. Более того, оно является структурой, где $B \cap C$ и $B + C$ (для подгрупп B, C группы A) играют роль структурных операций «inf» и «sup». Эта структура $\mathbf{L}(A)$ обладает максимальным и минимальным элементами (ими являются A и 0 соответственно) и удовлетворяет *модулярному закону*: если B, C, D — подгруппы группы A и $B \subseteq D$, то

$$B + (C \cap D) = (B + C) \cap D$$

В самом деле, включение $\subseteq$ очевидно, и нужно только доказать, что всякий элемент $d \in (B + C) \cap D$ лежит в подгруппе, стоящей в левой части равенства. Пусть $d = b + c$, где $b \in B$, $c \in C$; тогда $d - b = c$ принадлежит D и C. Следовательно, $c \in C \cap D$ и $d = b + c \in B + (C \cap D)$, что и требовалось.

Упражнения

1. Доказать, что конечная группа A содержит элемент порядка p тогда и только тогда, когда p делит порядок группы A.

2. Если $B \subset A$, $|B| < |A|$ и мощность $|A|$ бесконечна, то $|A/B| = |A|$.

3. Пусть B, C — подгруппы группы A, $C \subseteq B$ и индекс $|B : C|$ конечен. Тогда для любого подмножества S группы A подгруппа $\langle S, C\rangle$ имеет конечный индекс в $\langle S, B\rangle$, причем этот индекс делит $|B : C|$.

4. (а) (Скотт) Пусть B_i $(i \in I)$ — подгруппы группы A и B — их пересечение. Тогда индекс $|A : B|$ не больше, чем произведение индексов $|A : B_i|$, $i \in I$.

(б) Пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса имеет конечный индекс.

5. Пусть B, C — подгруппы группы A.

(а) Для любого $a \in A$ смежные классы $a + B$ и $a + (B + C)$ пересекаются с одними и теми же смежными классами по подгруппе C.

(б) Смежный класс по подгруппе B содержит $|B : (B \cap C)|$ попарно не конгруэнтных по модулю C элементов.

6 (Оре). Группа A имеет общую систему представителей смежных классов по подгруппам B и C тогда и только тогда, когда

$$|B : (B \cap C)| = |C : (B \cap C)|.$$

[*Указание*: для доказательства необходимости использовать упр. 5; для доказательства достаточности разбить множество смежных классов по подгруппе B на блоки по модулю $B + C$ и установить взаимно однозначное соответствие внутри блоков.]

7* (Маккой).

(а) Если B, C, G — подгруппы группы A и G содержится в теоретико-множественном объединении $B \cup C$, то или $G \subseteq B$, или $G \subseteq C$. [*Указание*: если $b \in (B \cap G) \setminus C$, то из $c \in C \cap G$ вытекает $b + c \in B \cap G$, $c \in B \cap G$.]

(б) Для теоретико-множественного объединения трех подгрупп аналогичное утвеждение уже не имеет места.

(в) Если подгруппа $G \subseteq A$ содержится в теоретико-множественном объединении подгрупп $B_1, \ldots, B_n$ группы A, но не содержится в объединении каких-либо $n - 1$ из подгрупп B_i, то

$$mG \subseteq B_1 \cap \ldots \cap B_n \text{ при некотором целом } m > 0.$$

[*Указание*: провести рассуждение, аналогичное рассуждению в лемме 7.3, см. ниже.]

8. Пусть $B \subseteq A$, и пусть S — подмножество группы A, не пересекающееся с подгруппой B. Тогда существует такая подгруппа C группы A, что 1) $B \subseteq C$; 2) C не пересекается с S; 3) если $C \subset C' \subseteq A$, то подгруппа C' пересекается с S.

9. Пусть B, X — подгруппы группы A. Существует такая подгруппа C группы A, что 1) $B \subseteq C$, 2) $B \cap X = C \cap X$, 3) если $C \subset C' \subset A$, то $B \cap X \subset C' \cap X$.

10 (Хонда [1]). Если $B \subseteq A$ и m — целое положительное число, то пусть

$$m^{-1}B = \{a \mid a \in A,\ ma \in B\}.$$

Доказать, что (а) $m^{-1}B$ — подгруппа; (б) $m^{-1}0 = A[m]$; (в) $m^{-1}(mB) = B + A[m]$; (г) $m(m^{-1}B) = B \cap mA$; (д) $m^{-1}(n^{-1}B) = (mn)^{-1}B$.

11. Доказать «неравенство треугольника» для высот

$$h_p(a+b) \geqslant \min(h_p(a),\ h_p(b)),$$

а также тот факт, что при $h_p(a) \neq h_p(b)$ здесь имеет место равенство.

12. Если группа A содержит элементы бесконечного порядка, то множество всех элементов бесконечного порядка из A порождает A.

13. Если $B \subseteq A$, то $T(B) = T(A) \cap B$ и $S(B) = S(A) \cap B$.

14. $T(nA) = nT(A)$ для любого целого числа $n > 0$.

15. Если B, C, D — подгруппы группы A, то

$$(B \cap C) + (B \cap D) \subseteq B \cap (C + D)$$

и

$$B + (C \cap D) \subseteq (B + C) \cap (B + D).$$

Найти примеры, где имеют место строгие включения.

§ 2. Отображения и диаграммы

Пусть A и B — произвольные группы. *Отображение*

$$\alpha\colon A \to B$$

(часто обозначаемое через $A \xrightarrow{\alpha} B$) — это функция, которая ставит в соответствие каждому элементу $a \in A$ однозначно определенный элемент $b \in B$, $\alpha\colon a \mapsto b$. Элемент b называется *образом* элемента a при отображении α, и записывается это так: $b = \alpha(a)$ или просто $b = \alpha a$. Группа A называется *областью определения* [или просто *областью*] отображения α, группа B — его *областью значений* [или *кообластью*]. Отображение $\alpha : A \to B$ называется *гомоморфизмом* [группы A в группу B], если оно сохраняет сложение, т. е.

$$\alpha(a_1 + a_2) = \alpha a_1 + \alpha a_2$$

для всех $a_1, a_2 \in A$. Если нет нужды как-то обозначать гомоморфизм, можно просто писать $A \to B$.

Со всяким гомоморфизмом $\alpha\colon A \to B$ связаны две подгруппы: $\operatorname{Ker}\alpha \subseteq A$ и $\operatorname{Im}\alpha \subseteq B$. *Ядро* гомоморфизма α, $\operatorname{Ker}\alpha$, — это множество всех элементов $a \in A$, для которых $\alpha a = 0$, тогда как *образ* гомоморфизма α,

$\operatorname{Im}\alpha$, состоит из всех таких $b \in B$, что для некоторого $a \in A$ имеет место $\alpha a = b$. Вместо $\operatorname{Im}\alpha$ можно писать αA. Если $\operatorname{Im}\alpha = B$, то гомоморфизм α называется *сюръективным*; мы будем также говорить, что α — *эпиморфизм*. Если $\operatorname{Ker}\alpha = 0$, то α называется *инъективным* гомоморфизмом, или *мономорфизмом*. Если $\operatorname{Im}\alpha = B$ и $\operatorname{Ker}\alpha = 0$, то α — взаимно однозначное соответствие между A и B [т. е. α *биективно*]; в этом случае α называется *изоморфизмом*. Группы A и B называются *изоморфными* [обозначение $A \cong B$], если существует изоморфизм $\alpha : A \to B$; в этом случае обратное отображение $\alpha^{-1} : B \to A$ существует и также является изоморфизмом. Как обычно в алгебре, мы не делаем различия между изоморфными группами, кроме случая, когда они — различные подгруппы одной и той же большей группы. Если G является подгруппой одновременно в группе A и в группе B и гомоморфизм $\alpha : A \to B$ оставляет элементы из G на месте, то α называется *гомоморфизмом над* G.

Гомоморфизм с образом 0 называется *нулевым гомоморфизмом*; он обозначается через 0. Если $A \subseteq B$, то отображение, которое сопоставляет каждому элементу $a \in A$ его самого, можно рассматривать как гомоморфизм группы A в группу B; он называется *инъекцией* [или *вложением*]. Инъекция $0 \to A$ — единственный гомоморфизм группы 0 в A. Если $\alpha\colon A \to B$ и $C \subseteq A$, то *ограничение* $\alpha \mid C$ отображения α на C имеет в качестве области определения группу C, в качестве области значений — группу B и совпадает с α на C.

Пусть $\alpha\colon A \to B$ и $\beta\colon B \to C$ — гомоморфизмы; здесь область значений гомоморфизма α совпадает с областью определения гомоморфизма β. Составное отображение $A \to B \to C$, называемое *произведением* гомоморфизмов α и β и обозначаемое через $\beta \circ \alpha$ или просто $\beta\alpha$ [обратите внимание на порядок сомножителей!], снова является гомоморфизмом. Напомним, что $\beta\alpha$ действует согласно правилу

$$(\beta\alpha)\, a = \beta\,(\alpha a)$$

для всех $a \in A$. Если определены произведения $\beta\alpha$ и $\gamma\beta$, то имеет место закон ассоциативности

$$\gamma\,(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha.$$

Легко убедиться, что на α можно *сокращать справа* [т. е. из $\beta\alpha = \gamma\alpha$ обязательно вытекает $\beta = \gamma$] тогда и только тогда, когда α — эпиморфизм, и на α можно *сокращать слева* [т. е. из $\alpha\beta = \alpha\gamma$ обязательно вытекает $\beta = \gamma$] тогда и только тогда, когда α — мономорфизм. Произведение двух эпиморфизмов [мономорфизмов] снова является эпиморфизмом [мономорфизмом].

Гомоморфное отображение группы A в себя называется *эндоморфизмом*, изоморфное отображение группы A на себя называется *автоморфизмом*. Тождественный автоморфизм 1_A группы A удовлетворяет условиям

$$1_A\alpha = \alpha, \qquad \beta 1_A = \beta,$$

если только произведения, стоящие слева, определены. Подгруппа B группы A, которая отображается в себя при всяком эндоморфизме [автоморфизме] группы A, называется *вполне характеристической* [1]) [*характеристической*] подгруппой группы A.

Пусть $\alpha\colon A \to B$ — эпиморфизм, и пусть $\operatorname{Ker}\alpha = K$. Полный прообраз $\alpha^{-1}b = \{a \mid a \in A,\ \alpha a = b\}$ элемента $b \in B$ является смежным классом $a + K$ в A. Отсюда следует, что индуцированное эпиморфизмом α отображение $a + K \mapsto \alpha a$ [которое не зависит от конкретного выбора представителя a смежного класса] представляет собой изоморфизм между A/K и B. Таким же образом произвольный гомоморфизм $\alpha\colon A \to B$ индуцирует изоморфизм между группами $A/\operatorname{Ker}\alpha$ и $\operatorname{Im}\alpha$. Отображение $a \mapsto a + K$ называется *каноническим* или *естественным* эпиморфизмом группы A на A/K. Если $C \subseteq B \subseteq A$, то 1_A индуцирует эпиморфизм $a + C \mapsto a + B$ группы A/C на A/B.

Если гомоморфизмы α, β имеют одну и ту же область определения A и одну и ту же область значений B, то можно определить их *сумму* $\alpha + \beta$, положив

$$(\alpha + \beta)\, a = \alpha a + \beta a$$

для всякого $a \in A$. Легко проверить, что $\alpha + \beta\colon A \to B$ — также гомоморфизм, причем

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha + 0 =$$
$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$
$$(\alpha + \beta)\,\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma, \quad \delta\,(\alpha + \beta) = \delta\alpha + \delta\beta$$

если только суммы и произведения определены

Последовательность групп A_i и гомоморфизмов α_i

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_k} A_k \qquad (k \geqslant 2)$$

называется *точной*, если

$$\operatorname{Im}\alpha_i = \operatorname{Ker}\alpha_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k - 1.$$

В частности, последовательность $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ точна тогда и только тогда, когда α — мономорфизм, а последовательность $B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ точна тогда и только тогда, когда β — эпиморфизм. Точность последовательности $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ эквивалентна тому, что α — изоморфизм. Точная последовательность вида

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

[1]) Фукс называет такие подгруппы fully invariant.— *Прим. перев.*

называется *короткой точной последовательностью*; здесь α — такое вложение группы A в B, что β — эпиморфизм с ядром $\operatorname{Im}\alpha$. [Заметим, что в этом случае группу A можно отождествить с подгруппой $\operatorname{Im}\alpha$ группы B, а группу C — с факторгруппой B/A.]

Грубо говоря, *диаграмма* групп и гомоморфизмов состоит из прописных букв, обозначающих группы, и стрелок между некоторыми парами прописных букв, изображающих гомоморфизмы между указанными группами. Диаграмма называется *коммутативной*, если мы получаем один и тот же составной гомоморфизм каждый раз, когда следуем от одной группы к другой по направлению стрелок вдоль разных путей в диаграмме. Например, диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\nu} & C \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ A' & \xrightarrow{\mu'} & B' & \xrightarrow{\nu'} & C' \end{array}$$

коммутативна в точности тогда, когда совпадают гомоморфизмы $\beta\mu$ и $\mu'\alpha$ группы A в группу B' и гомоморфизмы $\gamma\nu$ и $\nu'\beta$ группы B в группу C'; тогда отсюда вытекает совпадение гомоморфизмов $\gamma\nu\mu$, $\nu'\beta\mu$, $\nu'\mu'\alpha$. В диаграммах тождественное отображение часто будет обозначаться знаком равенства, например

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

Эта диаграмма по существу совпадает с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\alpha}{\nearrow} & B \\ A & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ & \underset{\gamma}{\searrow} & C \end{array}$$

Если она коммутативна, мы скажем, что γ *проводится через* $B \to C$.

Следующие две леммы довольно элементарны.

Лемма 2.1. *Диаграмму*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & G & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array} \qquad (1)$$

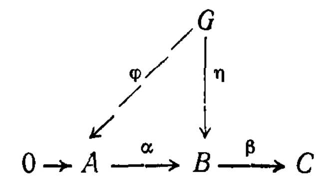
с точной строкой можно вложить в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & G & & \\ & & & \swarrow{\scriptstyle\varphi} & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array} \qquad (2)$$

тогда и только тогда, когда $\beta\eta = 0$. *При этом гомоморфизм* $\varphi\colon G \to A$ *определяется однозначно.*

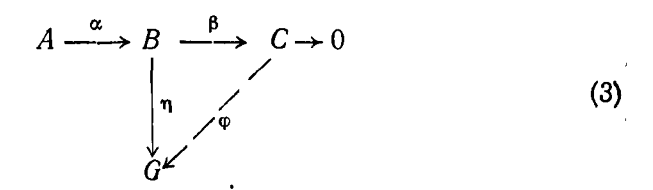
Если нужный нам гомоморфизм φ существует, то из равенства $\eta = \alpha\varphi$ вытекает, что $\beta\eta = \beta\alpha\varphi = 0\varphi = 0$. Следовательно, условие леммы необходимо. Обратно, если в диаграмме (1) $\beta\eta = 0$, то $\operatorname{Im}\eta \subseteq \operatorname{Ker}\beta$. В силу точности нижней строки $\operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$, а α — мономорфизм; следовательно, определено отображение $\varphi = \alpha^{-1}\eta$ группы G в A. Легко показать, что это гомоморфизм, делающий диаграмму (2) коммутативной. Если $\varphi'\colon G \to A$ — другое отображение с теми же свойствами, то $\alpha\varphi' = \eta = \alpha\varphi$, откуда $\varphi' = \varphi$, так как α — мономорфизм. ■

Для экономии места в дальнейшем диаграммы (1) и (2) будут заменяться одной диаграммой



таким образом, пунктирные стрелки будут обозначать гомоморфизмы, которые должны быть «восполнены».

Лемма 2.2. *Диаграмма*



с точной строкой может быть пополнена гомоморфизмом $\varphi\colon C \to G$ *так, чтобы получилась коммутативная диаграмма, тогда и только тогда, когда* $\eta\alpha = 0$. *При этом гомоморфизм* φ *определяется однозначно.*

Если нужный нам гомоморфизм φ существует, то $\eta = \varphi\beta$, $\eta\alpha = \varphi\beta\alpha = \varphi 0 = 0$, и необходимость доказана. Обратно, предположим, что $\eta\alpha = 0$, и определим $\varphi\colon C \to G$ так: пусть $\varphi c = \eta b$, если для $b \in B$ выполнено равенство $\beta b = c$. Это определение корректно, так как если $b' \in B$ тоже удовлетворяет условию $\beta b' = c$, то $b' - b \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Ker}\eta$ и, следовательно, $\eta b' = \eta b$. Легко видеть,

что φ — гомоморфизм, превращающий диаграмму (3) в коммутативную. Наконец, если для $\varphi'\colon C \to G$ тоже выполнено равенство $\varphi'\beta = \eta$, то $\varphi'\beta = \varphi\beta$, и из того, что β — эпиморфизм, получаем $\varphi' = \varphi$. ∎

В доказательстве следующей леммы мы используем «диаграммный поиск».

Лемма 2.3 (5-лемма). *Пусть*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle\gamma_1} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_2} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_3} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_4} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_5} \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}$$

— коммутативная диаграмма с точными строками. Тогда

(а) *если γ_1 — эпиморфизм, а γ_2, γ_4 — мономорфизмы, то γ_3 — мономорфизм;*

(б) *если γ_5 — мономорфизм, а γ_2, γ_4 — эпиморфизмы, то γ_3 — эпиморфизм;*

(в) *если γ_1 — эпиморфизм, γ_5 — мономорфизм, γ_2, γ_4 — изоморфизмы, то γ_3 — изоморфизм.*

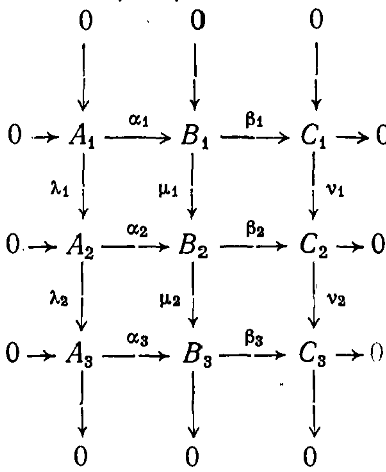
Предположим, что выполнены условия пункта (а), и пусть $a_3 \in \operatorname{Ker} \gamma_3$. В силу коммутативности третьего квадрата $\gamma_4\alpha_3 a_3 = \beta_3\gamma_3 a_3 = 0$, откуда $\alpha_3 a_3 = 0$, так как γ_4 — мономорфизм. В силу того, что верхняя строка точна, существует такой элемент $a_2 \in A_2$, что $\alpha_2 a_2 = a_3$, а в силу коммутативности второго квадрата $\beta_2\gamma_2 a_2 = \gamma_3\alpha_2 a_2 = \gamma_3 a_3 = 0$. Нижняя строка точна, поэтому $\beta_1 b_1 = \gamma_2 a_2$ для некоторого $b_1 \in B_1$, а так как γ_1 — эпиморфизм, $\gamma_1 a_1 = b_1$ для некоторого $a_1 \in A_1$. Таким образом, $\gamma_2\alpha_1 a_1 = \beta_1\gamma_1 a_1 = \beta_1 b_1 = \gamma_2 a_2$, откуда $\alpha_1 a_1 = a_2$, так как γ_2 — мономорфизм. Это означает, что $a_3 = \alpha_2 a_2 = \alpha_2\alpha_1 a_1 = 0$, т. е. γ_3 — мономорфизм.

Пусть теперь выполнены условия пункта (б), и пусть $b_3 \in B_3$. Отображение γ_4 — эпиморфизм, поэтому $\beta_3 b_3 = \gamma_4 a_4$ для некоторого $a_4 \in A_4$. Следовательно, $\gamma_5\alpha_4 a_4 = \beta_4\gamma_4 a_4 = \beta_4\beta_3 b_3 = 0$, т. е. $\alpha_4 a_4 = 0$, так как γ_5 — мономорфизм. Верхняя строка диаграммы точна, поэтому $\alpha_3 a_3 = a_4$ для некоторого $a_3 \in A_3$, откуда $\beta_3\gamma_3 a_3 = \gamma_4\alpha_3 a_3 = \gamma_4 a_4 = \beta_3 b_3$. Точность нижней строки и то, что γ_2 — эпиморфизм, дают равенство $\beta_2 b_2 = \gamma_3 a_3 - b_3$ для некоторого элемента $b_2 \in B$ и $\gamma_2 a_2 = b_2$ для некоторого $a_2 \in A_2$. Отсюда $\gamma_3\alpha_2 a_2 = \beta_2\gamma_2 a_2 = \gamma_3 a_3 - b_3$, $b_3 = \gamma_3(a_3 - \alpha_2 a_2) \in \operatorname{Im} \gamma_3$, т. е. γ_3 — эпиморфизм.

Объединяя пункты (а) и (б), получаем (в). ∎

Приведем еще одну важную лемму несколько другого характера. Ее доказательство — опять обычный диаграммный поиск.

Лемма 2.4 (3×3-лемма). *Предположим, что диаграмма*



коммутативна, а все три ее столбца точны. Тогда если первые две или последние две строки точны, то оставшаяся строка тоже точна.

Мы докажем только, что из точности двух первых строк вытекает точность последней строки. Доказательство второй части леммы (которое проводится двойственным образом) предоставляется читателю.

Пусть $a_3 \in \operatorname{Ker} \alpha_3$. Так как λ_2 — эпиморфизм, то $\lambda_2 a_2 = a_3$ для некоторого $a_2 \in A_2$. Из $\mu_2\alpha_2 a_2 = \alpha_3\lambda_2 a_2 = 0$ и точности среднего столбца вытекает существование такого $b_1 \in B_1$, что $\mu_1 b_1 = \alpha_2 a_2$. Из соотношения $\nu_1\beta_1 b_1 = \beta_2\mu_1 b_1 = \beta_2\alpha_2 a_2 = 0$ мы получаем $\beta_1 b_1 = 0$, так как ν_1 — мономорфизм. Отсюда и из точности первой строки получается, что $\alpha_1 a_1 = b_1$ для некоторого $a_1 \in A_1$. Следовательно, $\alpha_2 a_2 = \mu_1 b_1 = \mu_1\alpha_1 a_1 = \alpha_2\lambda_1 a_1$. Таким образом, так как α_2 — мономорфизм, $a_2 = \lambda_1 a_1$, откуда $a_3 = \lambda_2 a_2 = \lambda_2\lambda_1 a_1 = 0$, т. е. α_3 — мономорфизм.

Так как $\beta_3\alpha_3\lambda_2 = \beta_3\mu_2\alpha_2 = \nu_2\beta_2\alpha_2 = 0$ и λ_2 — эпиморфизм, то имеет место $\beta_3\alpha_3 = 0$. Чтобы показать, что $\operatorname{Ker} \beta_3 \subseteq \operatorname{Im} \alpha_3$, возьмем $b_3 \in \operatorname{Ker} \beta_3$. Мы знаем, что для некоторого $b_2 \in B_2$ справедливо равенство $\mu_2 b_2 = b_3$. Отсюда $\nu_2\beta_2 b_2 = \beta_3\mu_2 b_2 = 0$. В силу точности третьего столбца существует такой элемент $c_1 \in C_1$, что $\nu_1 c_1 = \beta_2 b_2$. Из точности первой строки вытекает, что $\beta_1 b_1 = c_1$ для некоторого $b_1 \in B_1$, откуда $\beta_2 (b_2 - \mu_1 b_1) = \beta_2 b_2 - \nu_1\beta_1 b_1 = 0$. Рассматривая вторую строку, получаем, что существует $a_2 \in A_2$, для которого $\alpha_2 a_2 = b_2 - \mu_1 b_1$, откуда $\alpha_3\lambda_2 a_2 = \mu_2\alpha_2 a_2 = \mu_2 b_2 = b_3$, т. е. $b_3 \in \operatorname{Im} \alpha_3$.

Наконец, из соотношения $\operatorname{Im} \beta_3 \supseteq \operatorname{Im} \beta_3\mu_2 = \operatorname{Im} \nu_2\beta_2 = C_3$ вытекает, что β_3 — эпиморфизм. ■

Напомним *теоремы об изоморфизмах* Э. Нётер, которые будут часто использоваться.

1) Если B, C — подгруппы группы A и $C \subseteq B$, то

$$A/B \cong (A/C)/(B/C),$$

причем при естественном изоморфизме $a + B$ отображается на смежный класс, содержащий $a + C$ ($a \in A$).

2) Если B, C — подгруппы группы A, то

$$B/(B \cap C) \cong (B + C)/C,$$

где естественный изоморфизм — это отображение φ: $b + (B \cap C) \mapsto b + C$ ($b \in B$). [Этот изоморфизм φ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B \cap C & \to & B & \to & B/(B \cap C) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \to & C & \to & B+C & \to & (B+C)/C & \to & 0 \end{array}$$

где первые два вертикальных отображения — вложения.]

Упражнения

1. Пусть α: $A \to B$, β: $B \to C$. Доказать, что

(а) $\operatorname{Ker} \beta\alpha \supseteq \operatorname{Ker} \alpha$, причем если β — мономорфизм, то имеет место равенство.

(б) $\operatorname{Im} \beta\alpha \subseteq \operatorname{Im} \beta$, причем если α — эпиморфизм, то выполняется равенство.

2. Пусть снова α: $A \to B$, β: $B \to C$.

(а) Если $\beta\alpha$ — мономорфизм, то α — мономорфизм [но β может не быть мономорфизмом].

(б) Если $\beta\alpha$ — эпиморфизм, то β — эпиморфизм [но α может не быть эпиморфизмом].

3. Для всякого гомоморфизма α: $A \to B$ существует точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Ker} \alpha \to A \xrightarrow{\alpha} B \to B/\operatorname{Im} \alpha \to 0.$$

4. Если μ — умножение на натуральное число m, а ρ — вложение, то последовательность

$$0 \to A[m] \xrightarrow{\rho} A \xrightarrow{\mu} mA \to 0$$

точна.

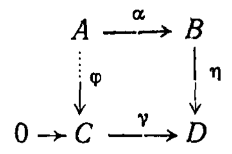
5. Пусть α: $A \to B$ и $B' \subseteq B$.

(а) Если положить $\alpha^{-1}B' = \{a \mid a \in A,\ \alpha a \in B'\}$, то $\alpha(\alpha^{-1}B') \subseteq B'$.

(б) Если $A' \subseteq A$, то $A' \subseteq \alpha^{-1}(\alpha A')$, причем равенство в общем случае места не имеет.

6. Если $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — точная последовательность и $B' \subseteq B$, то существуют такие подгруппы $A' \subseteq A$, $C' \subseteq C$, что точна последовательность $0 \to A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \to 0$, где $\alpha' = \alpha \mid A'$, $\beta' = \beta \mid B'$.

7. В диаграмме



с точной нижней строкой на место пунктирной стрелки можно поставить такой гомоморфизм, что диаграмма станет коммутативной тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} \eta\alpha \subseteq \operatorname{Im} \gamma$. При этом φ определяется однозначно.

8. Сформулировать и доказать утверждение, двойственное упр. 7 [все стрелки повернуть в обратную сторону].

9. Гомоморфизм $A \to A'$, превращающий диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

с точными строками в коммутативную, существует тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $C \to C'$, превращающий эту диаграмму в коммутативную.

10. Пусть α, β — два гомоморфизма $A \to B$. Пусть, далее, существуют такая группа K и такой гомоморфизм $\gamma\colon K \to A$, что $\alpha\gamma = \beta\gamma$ и если для $\gamma'\colon K' \to A$ справедливо равенство $\alpha\gamma' = \beta\gamma'$, то можно найти единственный гомоморфизм $\varphi\colon K' \to K$ со свойством $\gamma' = \gamma\varphi$. Доказать, что γ — мономорфизм и $\operatorname{Im} \gamma = \operatorname{Ker} (\alpha - \beta)$.

11. Пусть B, C — такие подгруппы группы A, что $A = B + C$, и пусть $\beta\colon B \to X$, $\gamma\colon C \to X$ — гомоморфизмы в одну и ту же группу X. Тогда гомоморфизм $\alpha\colon A \to X$, такой, что $\alpha \mid B = \beta$ и $\alpha \mid C = \gamma$, существует в том и только в том случае, когда $\beta \mid B \cap C = \gamma \mid B \cap C$.

12. Доказать вторую часть леммы 2.4.

13. Для всякого натурального числа m и любой вполне характеристической подгруппы B группы A подгруппы mB и $B[m]$ являются вполне характеристическими в A.

14. Вполне характеристическая подгруппа вполне характеристической подгруппы группы A сама является вполне характеристической в A.

15. (а) Если B — вполне характеристическая подгруппа группы A и η — эндоморфизм группы A, то отображение $a + B \mapsto \eta a + B$ — эндоморфизм группы A/B.

(б) Если B — вполне характеристическая подгруппа группы A и C/B — вполне характеристическая подгруппа группы A/B, то C — вполне характеристическая подгруппа группы A.

16. (а) Если B_i ($i \in I$) — вполне характеристические [характеристические] подгруппы группы A, то подгруппы $\bigcap B_i$ и $\sum B_i$ также вполне характеристические [характеристические].

(б) Если S — подмножество группы A, то существует единственная минимальная вполне характеристическая [характеристическая] подгруппа группы A, содержащая S. Она совпадает с $\langle \ldots, \varphi S, \ldots \rangle$, где φ пробегает множество всех эндоморфизмов [автоморфизмов] группы A.

17. Если B — вполне характеристическая [характеристическая] подгруппа группы A и S — подмножество в A, причем $B \cap S = \varnothing$, то существует такая вполне характеристическая [характеристическая] подгруппа C группы A, что 1) $B \subseteq C$, 2) $C \cap S = \varnothing$, 3) если C' — вполне характеристическая [характеристическая] подгруппа группы A и $C \subset C'$, то $C' \cap S \neq \varnothing$.

18. Пусть η — эндоморфизм группы A и m — натуральное число. Тогда $m^{-1} \operatorname{Ker} \eta = \operatorname{Ker} m\eta$.

§ 3. Важнейшие типы групп

Циклические группы. Эти группы были определены как группы, которые могут быть порождены одним элементом, т. е. это группы вида $\langle a \rangle$.

Если $A = \langle a \rangle$ — бесконечная циклическая группа, то она изоморфна аддитивной группе Z целых рациональных чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ [изоморфизм задается соответствием $na \mapsto n$], т. е. все бесконечные циклические группы изоморфны между собой; мы их будем обозначать одним и тем же символом Z. Так же как и a, элемент $-a$ порождает группу A, но никакой другой элемент na уже группу A не порождает.

Конечная циклическая группа $A = \langle a \rangle$ порядка m состоит из элементов $0, a, 2a, \ldots, (m-1)a$. Так как $ma = 0$, мы действуем здесь точно так же, как с целыми числами по модулю m; таким образом, группа A изоморфна аддитивной группе $Z(m)$ классов вычетов по модулю m. Следовательно, все конечные циклические группы одного и того же порядка m изоморфны между собой; мы будем их обозначать через $Z(m)$.

Пусть опять $A = \langle a \rangle$ — циклическая группа конечного порядка m. Тогда наряду с a каждый элемент ka, где $(k, m) = 1$, также порождает A. В самом деле, если n — натуральное число и $n(ka) = 0$, то $m \mid nk$, откуда в силу условия на k получаем, что $m \mid n$. Это означает, что $o(ka) = m$ и, следовательно, $\langle ka \rangle = \langle a \rangle$. Обратно, если ka порождает $\langle a \rangle$, то $o(ka) = m$, и если $(k, m) = d$, то $md^{-1}ka = kd^{-1}ma = 0$, откуда $o(ka) \leqslant md^{-1}$, т. е. $d = 1$. Следовательно, $\langle ka \rangle = \langle a \rangle$ тогда и только тогда, когда $(k, m) = 1$. Отсюда вытекает, что группа $Z(m)$ может быть порождена одним элементом $\phi(m)$ способами, где ϕ — функция Эйлера.

В связи с принятым нами обозначением для циклических групп всегда нужно иметь в виду, что ни Z, ни $Z(m)$ не является абстрактной группой: в то время как невозможно указать какое-нибудь различие между двумя образующими абстрактной бесконечной циклической группы или $\phi(m)$ образующими

абстрактной циклической группы порядка m, Z и $Z(m)$ имеют отличные от других образующие элементы, а именно 1 и класс вычетов, определяемый числом 1, соответственно. [Это окажется существенным при рассмотрении некоторых естественных изоморфизмов.]

Подгруппы циклических групп также являются циклическими группами. Чтобы проверить это, возьмем ненулевую подгруппу B группы $\langle a \rangle$ и обозначим через n наименьшее натуральное число, для которого $na \in B$. Тогда все кратные элемента na будут лежать в B, и если $sa \in B$ для некоторого целого числа $s = qn + r$ $(0 \leqslant r < n)$, то из включения $ra = sa - q(na) \in B$ получим, что $r = 0$, откуда $B = \langle na \rangle$. Если a имеет конечный порядок m, то $n \mid m$. В самом деле, если u, v — такие целые числа, что $mu + nv = (m, n)$, то $(m, n)\,a = mua + nva = v\,(na) \in B$, откуда $n \leqslant (m, n)$. Для различных делителей $n\ (> 0)$ числа m подгруппы $\langle na \rangle$ различны; таким образом, группа $Z(m)$ имеет столько подгрупп, сколько делителей имеет число m. Заметим, что из двух подгрупп группы $Z(m)$ одна содержит другую тогда и только тогда, когда делитель числа m, соответствующий первой подгруппе, делит делитель числа m, соответствующий второй подгруппе. Если элемент a имеет бесконечный порядок, то и na $(n > 0)$ имеет бесконечный порядок, и всякая ненулевая подгруппа группы Z бесконечная циклическая. Подгруппа $\langle na \rangle$ имеет индекс n в группе $\langle a \rangle$, и это единственная подгруппа индекса n.

Пусть $A = \langle a \rangle$ и $B = \langle na \rangle$, где $n > 0$ — делитель порядка элемента a, если этот порядок конечен. Тогда факторгруппа A/B может быть порождена смежным классом $a + B$, который, очевидно, имеет порядок n; таким образом, $A/B \cong Z(n)$. Следовательно, все собственные факторгруппы [эпиморфные образы] циклической группы являются конечными циклическими группами.

Коциклические группы. Циклическая группа может быть охарактеризована как группа A, содержащая такой элемент a, что всякий гомоморфизм $\varphi\colon B \to A$, где $a \in \operatorname{Im} \varphi$, является эпиморфизмом. Дуализируя это понятие, назовем группу C *коциклической*, если существует такой элемент $c \in C$, что всякий гомоморфизм $\varphi\colon C \to B$, где $c \notin \operatorname{Ker} \varphi$, является мономорфизмом. В этом случае элемент c называется *кообразующим* группы C. Так как всякая подгруппа служит ядром некоторого гомоморфизма, кообразующий элемент c должен принадлежать всем ненулевым подгруппам группы C. Следовательно, пересечение всех ненулевых подгрупп коциклической группы C отлично от нуля; это пересечение — наименьшая ненулевая подгруппа группы C. Обратно, если группа обладает наименьшей ненулевой подгруппой, то эта группа коциклическая, а всякий ненулевой элемент ее наименьшей подгруппы — кообразующий.

Циклическая группа $\langle a \rangle$, имеющая порядок, равный степени p^k простого числа p, является коциклической, а всякий ее элемент порядка p — кообразующий. Это следует из того простого факта, что

$$0 \subset \langle p^{k-1}a \rangle \subset \ldots \subset \langle pa \rangle \subset \langle a \rangle$$

— это все подгруппы группы $\langle a\rangle$. Коциклическая группа другого типа была найдена Прюфером [1].

Пусть p— простое число. Корни степени p^n из единицы, где n пробегает все неотрицательные целые числа, образуют бесконечную мультипликативную группу; в соответствии с принятым нами соглашением перейдем к аддитивной записи. Получится группа, называемая *квазициклической* или *группой типа* p^∞ [обозначение $Z(p^\infty)$], которую можно определить следующим образом: она порождается элементами $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, где

$$pc_1 = 0,\ pc_2 = c_1,\ \ldots,\ pc_{n+1} = c_n,\ \ldots. \tag{1}$$

Здесь $o(c_n) = p^n$ и всякий элемент из $Z(p^\infty)$ кратен некоторому элементу c_n.

Чтобы показать, что $Z(p^\infty)$ — коциклическая группа, возьмем собственную подгруппу B группы $Z(p^\infty)$. Существует образующий c_{n+1} с наименьшим индексом $n+1$, не принадлежащий B. Мы утверждаем, что $B = \langle c_n\rangle$ (если $n = 0$, то $B = 0$). Очевидно, $c_n \in B$. Далее, всякий элемент $b \in B$ может быть записан в виде $b = kc_m$ при некоторых k и m, причем можно предполагать, что k не делится на p. Если r, s — такие целые числа, что $kr + p^m s = 1$, то $c_m = krc_m + p^m sc_m = rb \in B$, отуда $m \leqslant n$, $b \in \langle c_n\rangle$, т. е. действительно $B = \langle c_n\rangle$. Следовательно, все собственные подгруппы группы $Z(p^\infty)$ — конечные циклические группы порядка $p^n (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Эти подгруппы образуют цепь по отношению включения

$$0 \subset \langle c_1\rangle \subset \ldots \subset \langle c_n\rangle \subset \ldots,$$

так как для заданного n существует одна и только одна подгруппа порядка p^n, а именно та, которая порождается элементом c_n.

Теорема 3.1. *Группа C является коциклической тогда и только тогда, когда $C \cong Z(p^k)$, где $k = 1, 2, \ldots$ или ∞.*

Пусть $c \in C$ — кообразующий элемент группы C. Тогда $\langle c\rangle$ —наименьшая ненулевая подгруппа группы C, откуда следует, что порядок элемента c равен простому числу p. Так как c лежит в каждой ненулевой подгруппе группы C, то C не может содержать ни элементов бесконечного порядка, ни элементов, порядки которых делятся на простые числа, отличные от p. Следовательно, C есть p-группа. Дальше доказательство будем вести по индукции. Предположим, что группа C содержит не более одной подгруппы C_n порядка p^n, причем эта подгруппа циклическая, $C_n = \langle c_n\rangle$. Если A, B — подгруппы группы C порядка p^{n+1} и $a \in A\backslash C_n$, $b \in B\backslash C_n$, то из $a, b \notin C_n$ вытекает, что $o(a) = p^{n+1} = o(b)$. Отсюда $pa = rc_n$, $pb = sc_n$ для некоторых целых чисел r, s, взаимно простых с p. Если r', s' таковы, что $rr' \equiv 1 \equiv ss' \bmod p^n$, то r', s' взаимно просты с p и для $a' = r'a$, $b' = s'b$ имеем $\langle a'\rangle = \langle a\rangle$, $pa' = c_n$, $\langle b'\rangle = \langle b\rangle$, $pb' = c_n$. Поэтому $p(a' - b') = 0$, $a' - b' = tc_n$ при некотором целом t, т. е. $a' = b' + tpb'$, $b' = a' - tpa'$,

откуда вытекает, что элементы a' и b' порождают одну и ту же циклическую группу $\langle a' \rangle = \langle b' \rangle$. Следовательно, $A = \langle a \rangle = \langle b \rangle = B$, и группа C — объединение конечной или бесконечной возрастающей цепи подгрупп порядков p^n, т. е. C имеет вид $Z(p^k)$. ∎

Очевидно, все квазициклические группы, соответствующие одному и тому же простому числу p, изоморфны между собой. Так как подгруппы группы $Z(p^\infty)$ имеют вид $Z(p^k)$, то легко видеть, что ненулевые факторгруппы группы $Z(p^\infty)$ снова являются группами вида $Z(p^\infty)$.

Группа всех корней из единицы, т. е. группа всех вращений окружности, имеющих конечный порядок, очевидно, содержит в качестве подгруппы группу $Z(p^\infty)$ при любом простом p. Кроме того, эта группа обладает тем замечательным свойством, что она *локально циклическая*, т. е. в ней все конечно порожденные подгруппы циклические. Она содержит в качестве подгрупп все конечные циклические группы.

Рациональные группы. Рациональные числа относительно сложения образуют группу, которая называется *полной рациональной группой* и обозначается через Q. Как и группа $Z(p^\infty)$, группа Q может быть также получена как объединение бесконечной возрастающей цепи циклических групп

$$Z = \langle 1 \rangle \subset \langle 2!^{-1} \rangle \subset \ldots \subset \langle n!^{-1} \rangle \subset \ldots$$

Таким образом, группа Q обладает системой образующих $c_1, \ldots, c_n, \ldots$, где

$$2c_2 = c_1, \; 3c_3 = c_2, \; \ldots, \; (n+1)\, c_{n+1} = c_n, \; \ldots \qquad (2)$$

Легко видеть, что группа Q также является локально циклической: всякая ее конечная система элементов содержится в некоторой подгруппе $\langle n!^{-1} \rangle$; поэтому подгруппа, порожденная этими элементами, служит подгруппой циклической группы и, следовательно, сама циклическая. Группа Q содержит много собственных подгрупп, не обладающих конечными системами образующих, например подгруппу Q_p всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p, или подгруппу $Q^{(p)}$ всех рациональных чисел, знаменатели которых — степени p. Подгруппы группы Q, называемые *рациональными группами*, играют фундаментальную роль в теории групп без кручения.

Всякая собственная факторгруппа Q/A группы Q [т. е. такая, что $A \neq 0$] является, очевидно, периодической группой, так как некоторое кратное любого рационального числа лежит в A. В частности, факторгруппа Q/Z изоморфна группе C всех корней из единицы, причем изоморфизм индуцируется эпиморфизмом $r \mapsto e^{2i r \pi}$ [где $r \in Q$, $i = \sqrt{-1}$, e — основание натурального логарифма] группы Q на группу C, ядром которого служит Z. Вообще $Q/\langle r \rangle \cong Q/Z$ для любого рационального числа $r \neq 0$, а $Q/Q_p \cong Z(p^\infty)$.

Целые p-адические числа. Целые p-адические числа находят широкое применение в различных ветвях теории абелевых групп. Укажем один из способов их введения.

Пусть p — простое число, а Q_p — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p. Ненулевые идеалы кольца Q_p являются главными идеалами, порожденными числами p^k, где $k = 0, 1, \ldots$ [т. е. Q_p — кольцо дискретного нормирования]. Если рассматривать идеалы (p^k) как фундаментальную систему окрестностей нуля, то Q_p превратится в топологическое кольцо, и можно будет образовать пополнение Q_p^* кольца Q_p в этой топологии [процесс пополнения для случая групп подробно описан в § 13]. Q_p^* также является кольцом, идеалы которого имеют вид (p^k), $k = 0, 1, \ldots$, причем это кольцо полно [в том смысле, что любая последовательность Коши в Q_p^* сходится] в топологии, определяемой его идеалами.

Элементы кольца Q_p^* могут быть представлены в следующем виде. Пусть $\{t_0, t_1, \ldots, t_{p-1}\}$ — полная система представителей смежных классов кольца Q_p по идеалу pQ_p, скажем $\{0, 1, \ldots, p-1\}$; тогда $\{p^k t_0, p^k t_1, \ldots, p^k t_{p-1}\}$ — полная система представителей смежных классов кольца $p^k Q_p$ по идеалу $p^{k+1}Q_p$. Пусть $\pi \in Q_p^*$, и пусть $a_n \in Q_p$ — последовательность, сходящаяся к π. В силу определения последовательности Коши почти все элементы a_n [т. е. все, кроме, быть может, конечного числа] принадлежат одному смежному классу по идеалу $p\,Q_p$, например смежному классу с представителем s_0. Почти все разности $a_n - s_0$, принадлежащие pQ_p, лежат в одном смежном классе кольца pQ_p по идеалу p^2Q_p, например в смежном классе с представителем ps_1. Продолжая так же дальше, мы получаем, что π однозначно определяет последовательность $s_0, s_1p, s_2p^2, \ldots$. Поставим элементу π в соответствие формальный бесконечный ряд $s_0 + s_1p + s_2p^2 + \ldots$. Частичные суммы этого ряда

$$b_n = s_0 + s_1p + \ldots + s_np^n \ (n = 1, 2, \ldots)$$

образуют в Q_p последовательность Коши, которая сходится в Q_p^*, к π, так как $\pi - b_n \in p^kQ_p^*$ (при $n \geqslant k$). Из единственности пределов следует, что таким путем различным элементам из Q_p^* окажутся поставленными в соответствие различные ряды. А так как каждый ряд $s_0 + s_1p + s_2p^2 + \ldots$ с коэффициентами из фиксированной системы представителей определяет элемент из Q_p^*, то мы можем отождествить элементы π кольца Q_p^* с формальными рядами $s_0 + s_1p + s_2p^2 + \ldots$ с коэффициентами из $\{t_0, t_1, \ldots, t_{p-1}\}$ или лучше из $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ и написать

$$\pi = s_0 + s_1p + \ldots + s_np^n + \ldots \quad (s_n = 0, 1, \ldots, p-1) \qquad (3)$$

Получающееся так кольцо Q_p^* является коммутативной областью целостности [где под *областью целостности* понимается кольцо без делителей нуля] и называется кольцом *целых p-адических чисел*; его мощность совпадает с мощностью континуума.

Заметим, что если $\rho = r_0 + r_1 p + \ldots + r_n p^n + \ldots$ ($r_n = 0, 1, \ldots, p-1$) — другое целое p-адическое число, то сумма $\pi + \rho = q_0 + q_1 p + \ldots + q_n p^n + \ldots$ и произведение $\pi\rho = q'_0 + q'_1 p + \ldots + q'_n p^n + \ldots$ определяются так: $q_0 = s_0 + r_0 - k_0 p$, $q_n = s_n + r_n + k_{n-1} - k_n p$, $q'_0 = s_0 r_0 - m_0 p$, $q'_n = s_0 r_n + s_1 r_{n-1} + \ldots + s_n r_0 + m_{n-1} - m_n p$ ($n = 1, 2, \ldots$), где целые числа k_0, k_n, m_0, m_n однозначно определяются тем условием, что все числа q_n и q'_n лежат между 0 и $p-1$. Что же касается вычитания и деления, то заметим, что противоположным к числу $\pi = s_n p^n + s_{n+1} p^{n+1} + \ldots$ ($s_n \neq 0$) является число $-\pi = (p - s_n) p^n + (p - s_{n+1} - 1) p^{n+1} + \ldots$, а обратный элемент π^{-1} для элемента (3) существует тогда и только тогда, когда $s_0 \neq 0$; его можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Аддитивную группу кольца $\mathfrak{Q}_p^*$ мы дальше будем обозначать символом J_p.

Упражнения

1. Простая (абелева) группа изоморфна $Z(p)$ для некоторого простого числа p.

2. Группа A обладает композиционным рядом тогда и только тогда, когда она конечна.

3. (а) Подгруппа M группы A называется *максимальной*, если из $M \subset A$ и $M \subseteq B \subset A$ следует $M = B$. Показать, что подгруппа M является максимальной тогда и только тогда, когда ее индекс в A — простое число.

(б) Доказать, что группы $Z(p^\infty)$ и Q не имеют максимальных подгрупп; группы $Z(p^k)$ ($k = 1, 2, \ldots$) и J_p имеют ровно по одной максимальной подгруппе; группа Z имеет бесконечно много максимальных подгрупп.

4. (а) Пересечение всех максимальных подгрупп группы A одного и того же простого индекса p совпадает с pA.

(б) *Подгруппа Фраттини* группы A [т. е. пересечение всех максимальных подгрупп группы A] совпадает с пересечением подгрупп pA, где p пробегает все простые числа.

(в) Каковы подгруппы Фраттини групп $Z(n)$, Z, $Z(p^\infty)$, Q, Q_p, J_p?

5. Доказать, что ни группа $Z(p^\infty)$, ни группа Q не являются конечно порожденными.

6. (а) Показать, что группа всех корней из единицы локально циклическая.

(б) Всякая подгруппа и всякая факторгруппа локально циклической группы является локально циклической.

7. Доказать, что

$$Q/Q_p \cong Z(p^\infty), \quad Q^{(p)}/Z \cong Z(p^\infty), \quad J_p/p^k J_p \cong Z(p^k),$$

где $k = 1, 2, \ldots$.

8 (Редеи). Если группа A содержит подгруппы, изоморфные $Z(p^k)$, где p — фиксированное простое число, а $k = 1, 2, \ldots$, но никакая собственная подгруппа группы A этим свойством уже не обладает, то $A \cong Z(p^\infty)$. [*Указание*: проверить, что $pA = A$, и выбрать образующие.]

9. Если для подгрупп B, C циклической группы A справедливо $A/B \cong A/C$, то B и C совпадают.

10. (а) Доказать, что целое p-адическое число π вида (3) является p-адической единицей тогда и только тогда, когда $s_0 \neq 0$.

(б) Поле частных кольца $\mathbf{Q}_p^*$ состоит из всех элементов вида πp^{-n}, где $\pi \in \mathbf{Q}_p^*$, n — неотрицательное целое число.

§ 4. Модули

Большая часть теорем об абелевых группах может быть перенесена (с соответствующими изменениями) на унитарные модули над областью главных идеалов R с единицей, и все может быть перенесено на модули (причем без изменения доказательств), если R обладает тем дополнительным свойством, что все факторкольца $\mathsf{R}/(\alpha)$, где $0 \neq \alpha \in \mathsf{R}$, конечны. Однако значительно более тонкий вопрос — найти естественные границы, в которых справедлива данная теорема теории абелевых групп, т. е. описать класс колец, для модулей над которыми эта теорема имеет место. Проблемы, подобные этой, находятся за пределами рассматриваемых нами сейчас вопросов, и поэтому мы ограничимся изучением только абелевых групп, т. е. модулей над кольцом Z целых чисел. Но иногда нам придется рассматривать модули, так как бывает естественнее проводить рассуждения для них. Поэтому напомним определение модулей.

Пусть R — ассоциативное кольцо, M — абелева группа и

1) любому элементу $\alpha \in \mathsf{R}$ и любому $a \in M$ сопоставлен элемент из M, называемый произведением элементов α и a и обозначаемый через αa;

2) $(\alpha\beta) a = \alpha(\beta a)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathsf{R}$ и $a \in M$;

3) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ для всех $\alpha \in \mathsf{R}$, $a, b \in M$;

4) $(\alpha + \beta) a = \alpha a + \beta a$ для всех $\alpha, \beta \in \mathsf{R}$, $a \in M$.

В этом случае говорят, что M — *левый* R-*модуль* или *левый модуль над* R. Если R обладает единичным элементом ε, то в большинстве случаев предполагается, что ε действует на M как единичный оператор:

5) $\varepsilon a = a$ для всех $a \in M$.

Такие R-модули M называются *унитарными*. В дальнейшем мы будем рассматривать только унитарные R-модули, причем кольцо R всегда будет предполагаться коммутативным; в этом случае можно не делать различия между левыми и правыми R-модулями. [В замечаниях модули являются унитарными левыми модулями.]

Напомним, что *подмодуль* N R-модуля M определяется как подмножество модуля M, являющееся R-модулем относительно тех же операций, т. е. подмодуль — это подгруппа в M со свойством $\alpha N \subseteq N$

для всех $\alpha \in \mathsf{R}$. В этом случае факторгруппу M/N можно превратить в R-модуль, называемый *фактормодулем*, если положить $\alpha(a+N) = \alpha a + N$ для всех смежных классов $a+N$ и $\alpha \in \mathsf{R}$.

Для R-модулей M, N групповой гомоморфизм φ: $M \to N$ называется R-*гомоморфизмом*, если выполнено равенство

$$\varphi(\alpha a) = \alpha\,\varphi(a)$$

для всех $a \in M$, $\alpha \in \mathsf{R}$. Что такое R-изоморфизм и т. д., ясно.

Если a — элемент R-модуля M, то *порядком* $o(a)$ элемента a называется множество всех его аннуляторов в кольце R:

$$o(a) = \{\alpha \in \mathsf{R} \mid \alpha a = 0\}.$$

Таким образом, $o(a)$ — левый идеал в R. Если $o(a) = 0$, то это соответствует бесконечному порядку элемента в группах.

Пример 1. Если R — кольцо Z целых чисел, то всякую абелеву группу A можно рассматривать как Z-модуль при естественном определении умножения числа $n \in \mathsf{Z}$ на элемент $a \in A$, т. е. когда na — это n-кратное элемента a.

Пример 2. Если R — это кольцо Q_p рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p, то p-группу A можно естественным образом превратить в Q_p-модуль. Именно, если $(n, p) = 1$, то для любого $a \in A$ произведение $n^{-1}a$ — однозначно определенный элемент из $\langle a \rangle$. В самом деле, если r, s — такие целые числа, что $nr + o(a)\,s = 1$, то $a = nra + o(a)\,sa = nra$, откуда $n^{-1}a = ra$ (причем легко видеть, что в A никакой элемент, отличный от ra, не дает при умножении на n элемент a).

Пример 3. Аналогично получается, что всякую p-группу A можно естественным образом превратить в Q_p^*-модуль; если $\pi = s_0 + s_1 p + \ldots + s_n p^n + \ldots \in \mathsf{Q}_p^*$ и элемент $a \in A$ имеет порядок p^n, то

$$\pi a = (s_0 + s_1 p + \ldots + s_{n-1} p^{n-1})\,a,$$

где элемент в правой части равенства не изменится, если мы возьмем частичную сумму ряда π с большим числом членов.

Заметим, что во всех наших примерах подмодули и R-гомоморфизмы — это просто подгруппы и групповые гомоморфизмы.

Модули над кольцом Q_p^* называются также *p-адическими модулями*.

Упражнения

1. Циклический R-модуль, порожденный элементом a, R-изоморфен R-модулю $R/o(a)$.

2. Если R — область главных идеалов, M есть R-модуль, $a, b \in M$ и $o(a) = (\alpha) \neq 0$, $o(b) = (\beta) \neq 0$, то $o(a+b) = (\gamma)$, где γ — делитель $\alpha\beta(\alpha, \beta)^{-1}$ и кратное $\alpha\beta(\alpha, \beta)^{-2}$.

3. Пусть R — коммутативная область целостности и M есть R-модуль. Тогда элементы $a \in M$, для которых $o(a) \neq 0$, образуют подмодуль N модуля M, причем в фактормодуле M/N все ненулевые элементы имеют порядок 0.

4. Пусть N — подмодуль R-модуля M. Доказать, что $o(a) \subseteq o(a+N)$, где $o(a+N)$ — порядок смежного класса $a+N$ в M/N.

5. Если $R = Z/(m)$, где m — натуральное число, то для всякого элемента a любого R-модуля $ma = 0$.

6. Если φ: $R' \to R$ — кольцевой гомоморфизм, переводящий единицу кольца R' в единицу кольца R, то всякий R-модуль M можно превратить в R'-модуль, полагая $\alpha' a = \varphi(\alpha') a$ для всех $\alpha' \in R'$, $a \in M$.

7. Всякий Q-модуль является группой без кручения.

§ 5. Категории абелевых групп

В теории] абелевых групп часто бывает удобно вести изложение в терминах категорий. Вообще, во многих случаях категории и функторы, видимо, являются подходящими обобщающими понятиями. Поэтому введем категории и рассмотрим некоторые важнейшие связанные с ними понятия.

Категории не являются алгебраическими системами в обычном смысле слова, т. е. это не обязательно множества с алгебраическими операциями. Категории даже не обязаны быть множествами, они только «классы». От предположения, что имеется множество, нужно освободиться потому, что, иапример, мы часто рассматриваем все абелевы группы, а это ие множество. [Поэтому удобио использовать аксиомы Геделя — Бериея из теории миожеств, где допускаются и множества, и классы. Если мы хотим избежать использования классов, то нужно ограничиться рассмотреиием абелевых групп, миожества элементов которых прииадлежат некоторому «уииверсальиому» множеству в смысле Гротендика.]

Категорией $\mathscr{C}$ называется класс *объектов* $A, B, C, \ldots$ и *морфизмов* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

1. С любой упорядоченной парой A, B объектов из $\mathscr{C}$ связано множество $\mathrm{Map}(A, B)$ морфизмов из $\mathscr{C}$, причем так, что всякий морфизм из $\mathscr{C}$ принадлежит точно одному множеству $\mathrm{Map}(A, B)$. Если $\alpha \in \mathscr{C}$ лежит в $\mathrm{Map}(A, B)$, то будем писать α: $A \to B$ и называть α *отображением* объекта A в B, A — *областью определения*, B — *областью значений* морфизма α.

2. С морфизмами $\alpha \in \mathrm{Map}(A, B)$ и $\beta \in \mathrm{Map}(B, C)$ связан единственный элемент из $\mathrm{Map}(A, C)$, называемый их *произведением* $\beta\alpha$.

3. Если произведения определены, то имеет место ассоциативность

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha.$$

4. Для каждого $A \in \mathscr{C}$ существует такой морфизм $1_A \in \mathrm{Map}(A, A)$, называемый *единичным морфизмом* объекта A, что $1_A \alpha = \alpha$ и $\beta 1_A = \beta$ всякий раз, когда это поизведение имеет смысл.

Легко непосредственно проверить, что 1_A однозначно определяется объектом A; в самом деле, если $\iota_A \in \mathrm{Map}(A, A)$ обладает таким же свойством, то произведение $1_A \iota_A$ равно и 1_A и ι_A. Называя морфизм $\iota \in \mathscr{C}$ *единицей*, когда $\iota\alpha = \alpha$ и $\beta\iota = \beta$, если только произведения определены, получаем, что существует взаимно однозначное соответствие между объектами A и единицами 1_A категории $\mathscr{C}$. Поэтому категории могут быть также определены только в терминах морфизмов.

Существует много примеров категорий: множества с отображениями в качестве морфизмов, не обязательно коммутативные группы или кольца с гомоморфизмами в качестве морфизмов, R-модули с R-гомоморфизмами, топологические пространства с непрерывными отображениями и т. д. Для нас наиболее важным примером является *категория* $\mathcal{A}$ *всех абелевых групп*, где объекты — абелевы группы, а морфизмы — их гомоморфные отображения. Очевидно, периодические (абелевы) группы, p-группы, группы без кручения и т. п. также образуют категории, если в качестве морфизмов брать гомоморфизмы. [Вообще, если объекты некоторой категории — группы, то всегда подразумевается, если не оговорено противное, что морфизмы категории — это гомоморфизмы одних групп категории в другие.]

Точно так же, как о гомоморфизмах для алгебраических систем, можно говорить о функторах для категорий. Если $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — категории, то *ковариантный функтор*

$$F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

[из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$] ставит в соответствие каждому объекту $A \in \mathcal{C}$ объект $F(A) \in \mathcal{D}$, а каждому морфизму $\alpha: A \to B$ в $\mathcal{C}$ — морфизм $F(\alpha) : F(A) \to F(B)$ в $\mathcal{D}$, причем так, что выполнены условия

1) если определено произведение $\beta\alpha$, где $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, то [$F(\beta) F(\alpha)$ определено в $\mathcal{D}$ и]

$$F(\beta\alpha) = F(\beta) F(\alpha);$$

2) F переводит единицу объекта $A \in \mathcal{C}$ в единицу объекта $F(A) \in \mathcal{D}$, т. е. для всех $A \in \mathcal{C}$

$$F(1_A) = 1_{F(A)}.$$

Таким образом, ковариантный функтор сохраняет области определения, области значений, произведения и единицы. *Тождественный функтор* E, определяемый равенствами $E(A) = A$, $E(\alpha) = \alpha$ для всех $A, \alpha \in \mathcal{C}$, является ковариантным функтором из категории $\mathcal{C}$ в нее же.

Контравариантный функтор $G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ определяется аналогично, но с обращением стрелок, т. е. G сопоставляет каждому объекту $A \in \mathcal{C}$ объект $G(A) \in \mathcal{D}$ и каждому морфизму $\alpha: A \to B$ из $\mathcal{C}$ морфизм $G(\alpha): G(B) \to G(A)$ из $\mathcal{D}$, причем выполняются равенства

$$G(\beta\alpha) = G(\alpha) G(\beta), \quad G(1_A) = 1_{G(A)}.$$

Просто термин «функтор» будет обычно обозначать ковариантный функтор.

Если F — функтор из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$, а G — функтор из категории $\mathcal{D}$ в категорию $\mathcal{E}$, то композиция GF — это функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{E}$ [где $GF(A) = G(F(A))$ и $GF(\alpha) = G(F(\alpha))$ для всех A, $\alpha \in \mathcal{C}$]. Очевидно, функтор GF ковариантен, если F и G одновременно ко- или контравариантны, и контравариантен, если один из функторов F, G ко-, а второй контравариантен.

Нам придется рассматривать функторы от нескольких аргументов, ковариантные по некоторым из этих аргументов и контравариантные по остальным. Если, например, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ — категории, то *бифунктор* F из $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ в $\mathscr{E}$, ковариантный на $\mathscr{C}$ и контравариантный на $\mathscr{D}$, сопоставляет каждой паре объектов (C, D), где $C \in \mathscr{C}$, $D \in \mathscr{D}$, объект $F(C, D) \in \mathscr{E}$, а каждой паре морфизмов $\alpha: A \to C$, $\beta: B \to D$ ($\alpha \in \mathscr{C}$, $\beta \in \mathscr{D}$) — морфизм $F(\alpha, \beta): F(A, D) \to F(C, B)$, причем так, что

$$F(\gamma\alpha, \delta\beta) = F(\gamma, \beta) F(\alpha, \delta) \text{ и } F(1_C, 1_D) = 1_{F(C, D)}, \qquad (1)$$

если только $\gamma\alpha$, $\delta\beta$ определены. Если зафиксировать $D \in \mathscr{D}$, то $C \mapsto F(C, D)$ и $\alpha \mapsto F(\alpha, 1_D)$ даст ковариантный функтор из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{E}$, а для фиксированного $C \in \mathscr{C}$ получится, что $D \mapsto F(C, D)$, $\beta \mapsto F(1_C, \beta)$ — контравариантный функтор из $\mathscr{D}$ в $\mathscr{E}$. Заметим, что в силу соотношений (1) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(A, D) & \xrightarrow{F(\alpha, 1_D)} & F(C, D) \\ {\scriptstyle F(1_A, \beta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(1_C, \beta)} \\ F(A, B) & \xrightarrow{F(\alpha, 1_B)} & F(C, B) \end{array}$$

коммутативна.

Можно привести очень много примеров функторов. Наиболее важными в теории абелевых групп являются те функторы, которые ставят в соответствие группе ее подгруппу или факторгруппу [они рассматриваются в следующем параграфе], а также функторы Hom, Ext, $\otimes$ и Tor [определяемые в гл. VIII — X]. Следующий пример носит другой характер.

Пусть $\mathscr{T}$ — категория, в которой объекты — это последовательности [A]: $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3$ групп и гомоморфизмов, где $\alpha_2\alpha_1 = 0$, а морфизмы — тройки $[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$ групповых гомоморфизмов $\gamma_i : A_i \to B_i$, для которых диаграмма

$$\begin{array}{lccccc} [A]: & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 \\ & \downarrow{\scriptstyle \gamma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_3} \\ [B]: & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 \end{array} \qquad ([A], [B] \in \mathscr{T})$$

коммутативна. Можно непосредственно проверить, что $\mathscr{T}$ — действительно категория.

Определим следующим образом *функтор гомологии* H из категории $\mathscr{T}$ в категорию $\mathscr{A}$. Для $[A] \in \mathscr{T}$ пусть $H[A] = \operatorname{Ker} \alpha_2/\operatorname{Im} \alpha_1$, а $H[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] : H[A] \to H[B]$ пусть будет гомоморфизмом

$$\varphi: a + \operatorname{Im} \alpha_1 \mapsto \gamma_2 a + \operatorname{Im} \beta_1 \qquad (a \in \operatorname{Ker} \alpha_2).$$

Очевидно, что (1) если $a \in \operatorname{Ker} \alpha_2$, то $\gamma_2 a \in \operatorname{Ker} \beta_2$; (2) если $a, a' \in \operatorname{Ker} \alpha_2$ и $a - a' \in \operatorname{Im} \alpha_1$, то $\gamma_2 a - \gamma_2 a' \in \operatorname{Im} \beta_1$; (3) φ сохраняет операцию сложения. Непосредственно проверяется, что H удовлетворяет условиям 1), 2), входящим в определение ковариантного функтора.

Один из основных вопросов, касающихся функторов, — установить, как они ведут себя по отношению к подгруппам и факторгруппам. Это удобно сделать в терминах точных последовательностей. Если F — ковариантный функтор из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{A}$ [вместо $\mathcal{A}$ можно брать ее подкатегории] и $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — точиая последовательность, то функтор F называется *точным слева* или *справа*, если точна последовательность

$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$$

или последовательность

$$F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C) \to 0$$

соответственно; если функтор F точен и слева, и справа, он называется *точным*. Для контравариантного функтора F указанные последовательности заменяются последовательностями

$$0 \to F(C) \xrightarrow{F(\beta)} F(B) \xrightarrow{F(\alpha)} F(A)$$

и

$$F(C) \xrightarrow{F(\beta)} F(B) \xrightarrow{F(\alpha)} F(A) \to 0$$

соответственно. Подфункторы тождественного функтора [см. следующий параграф] всегда точны слева, а факторфункторы точны справа.

Пусть F и G — ковариантные функторы из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$. *Естественным преобразованием* Φ: $F \to G$ называется функция, ставящая в соответствие каждому объекту $A \in \mathscr{C}$ морфизм φ_A: $F(A) \to G(A)$ из $\mathscr{D}$ таким образом, что для любого морфизма α: $A \to B$ категории $\mathscr{C}$ диаграмма (в $\mathscr{D}$)

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(B) \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_A} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_B} \\ G(A) & \xrightarrow{G(\alpha)} & G(B) \end{array}$$

коммутативна. В этом случае φ_A называется *естественным* морфизмом между $F(A)$ и $G(A)$. Естественный характер некоторых гомоморфизмов и изоморфизмов крайне важен. Если φ_A является изоморфизмом для всякого $A \in \mathscr{C}$, то Φ называется *естественной эквивалентностью.*

В теории абелевых групп приходится сталкиваться почти исключительно с *аддитивными функторами*, т. е. такими функторами F, что

$$F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$$

для всех тех $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, для которых $\alpha + \beta$ определено. Для аддитивного функтора F из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{A}$ получается, что $F(0) = 0$, где 0 обозначает нулевую группу или нулевой гомоморфизм, а также $F(n\alpha) = nF(\alpha)$ для любого $n \in \mathbf{Z}$.

Функторы из одной категории в другую подробно изучаются в гомологической алгебре; см. книги Картана и Эйленберга [1] и Маклейна [3].

Упражнения

1. Доказать, что для любого кольца R левые R-модули (как объекты) и R-гомоморфизмы (как морфизмы) образуют категорию.

2. Доказать, что следующая система является категорией: объекты — коммутативные диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_3 & \longrightarrow & A_4 \end{array} \qquad (2)$$

где A_i — группы, морфизмы — четверки $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ групповых гомоморфизмов, такие, что все квадраты, возникающие между (2) и другим объектом, являются коммутативными.

3. Категория с одним объектом является по существу полугруппой [морфизмов] с единицей.

4. Категория $\mathscr{C}'$ называется *подкатегорией* категории $\mathscr{C}$, если 1) все объекты из $\mathscr{C}'$ являются объектами категории $\mathscr{C}$; 2) $\mathrm{Map}_{\mathscr{C}'}(A, B)$, где $A, B \in \mathscr{C}'$, есть подмножество множества $\mathrm{Map}_{\mathscr{C}}(A, B)$; 3) произведение двух морфизмов из $\mathscr{C}'$ совпадает с их произведением как морфизмов из $\mathscr{C}$; 4) для любого объекта $A \in \mathscr{C}'$ морфизм 1_A один и тот же в $\mathscr{C}'$ и в $\mathscr{C}$. Доказать, что $I\colon A \mapsto A$, $\alpha \mapsto \alpha$ (для $A, \alpha \in \mathscr{C}'$) есть функтор из $\mathscr{C}'$ в $\mathscr{C}$.

5. Пусть $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ — две категории. Их *произведением* $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ называется категория, состоящая из объектов (A_1, A_2), где $A_i \in \mathscr{C}_i$, и морфизмов $(\alpha_1, \alpha_2)\colon (A_1, A_2) \to (B_1, B_2)$, где $\alpha_i \in \mathscr{C}_i$, в которой произведение $(\beta_1, \beta_2)(\alpha_1, \alpha_2)$ определено тогда и только тогда, когда определены произведения $\beta_1\alpha_1$ и $\beta_2\alpha_2$, причем в этом случае оно равно $(\beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_2)$. Доказать, что это действительно категория.

6. Проверить, что определенный выше функтор гомологии является функтором.

7. Произведение естественных преобразований является естественным преобразованием.

§ 6. Функторные подгруппы и факторгруппы

Некоторые из наиболее важных функторов в теории абелевых групп ставят в соответствие группе A ее подгруппу или факторгруппу. Рассмотрим вкратце этот тип функторов.

Для начала приведем несколько примеров таких функторов. Функторные свойства в них можно проверить непосредственно.

Пример 1. Фуиктор $T: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{B}$ всех периодических групп, где $T(A)$ для $A \in \mathcal{A}$ — периодическая часть группы A, а $T(\alpha)$ для $\alpha: A \to B$ из $\mathcal{A}$ — ограиичение $\alpha \mid T(A): T(A) \to T(B)$

Пример 2. Если взять цоколь $S(A)$ группы A вместо ее периодической части, то тоже получится фуиктор $S: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ [где $S(\alpha) = \alpha \mid S(A)$].

Пример 3. Функтор $M_n: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, где n — натуральное число, который ставит в соответствие группе A ее подгруппу nA, а гомоморфизму $\alpha: A \to B$ — индуцированиый гомоморфизм $\alpha \mid nA: nA \to nB$.

Пример 4. Пусть $\mathcal{A}_n$ — категория *n-ограниченных* групп, т. е. таких групп G, что $nG = 0$. Мы получим функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_n$, если поставим в соответствие группе A подгруппу $A[n]$, а гомоморфизму $\alpha: A \to B$ — его ограиичение $\alpha \mid A[n]$.

Пример 5. Если $\mathcal{C}$ — категория групп без кручеиия, то функтором из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{C}$ является функция, ставящая в соответствие группе $A \in \mathcal{A}$ факторгруппу $A/T(A)$ и гомоморфизму $\alpha: A \to B$ из $\mathcal{A}$ — иидуцированиый гомоморфизм $\alpha^*: a + T(A) \mapsto \alpha a + T(B)$ группы $A/T(A)$ в $B/T(B)$ [отображение α^* не зависит от выбора элемента a в определяемом им смежном классе по подгруппе $T(A)$].

Пример 6. Мы получим функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_n$, если положим $A \mapsto A/nA$ для всех $A \in \mathcal{A}$ и $\alpha \mapsto \alpha^*$ для всех $\alpha: A \to B$ из $\mathcal{A}$, где α^* — индуцироваиный гомоморфизм $a + nA \mapsto \alpha a + nB$.

Вообще, предположим, что нам дана функция F, ставящая в соответствие каждой группе $A \in \mathcal{A}$ такую ее подгруппу $F(A)$,

$$F(A) \subseteq A,$$

что если $\alpha: A \to B$ — гомоморфизм группы A в группу B, то $\alpha F(A) \subseteq F(B)$, т. е. ограничение $\alpha \mid F(A)$ отображает $F(A)$ в $F(B)$. Тогда если положить

$$F(\alpha) = \alpha \mid F(A),$$

то F будет функтором $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Мы будем называть $F(A)$ *функторной подгруппой* группы A. [Заметим, что функторная подгруппа возникает всегда *в связи* с функтором F из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{A}$ или в ее подкатегорию; следовательно, она должна быть определена для всех $A \in \mathcal{A}$, даже если в частном случае мы рассматриваем только одну группу A.] Примеры 1—4 показывают, что $T(A)$, $S(A)$, $n(A)$, $A[n]$ — функторные подгруппы группы A.

Предположим теперь, что F^* — функция, ставящая в соответствие каждой группе $A \in \mathcal{A}$ такую факторгруппу A/A^*, что если $\alpha: A \to B$ — гомоморфизм, то

$$a + A^* \mapsto \alpha a + B^*$$

— гомоморфизм группы A/A^* в B/B^*. Тогда легко проверить, что отображение $F^*: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ обладает функторными свойствами. $F^*(A) = A/A^*$ мы будем называть *функторной факторгруппой* группы A. Примеры 5 и 6 показывают, что $A/T(A)$ и A/nA — функторные факторгруппы группы A.

Между функторными подгруппами и функторными факторгруппами существует тесная связь.

Теорема 6.1. *$F(A)$ является функторной подгруппой группы A тогда и только тогда, когда $A/F(A) = F^*(A)$ есть функторная факторгруппа группы A.*

Если $\alpha\colon A \to B$ — гомоморфизм, то $\alpha^*\colon a + A^* \mapsto \alpha a + B^*$ является гомоморфизмом $A/A^* \to B/B^*$ в точности тогда, когда $\alpha a \in B^*$ для любого $a \in A^*$. Но это эквивалентно условию $\alpha A^* \subseteq B^*$ для функторных подгрупп $F(A) = A^*$, $F(B) = B^*$. ∎

Укажем два довольно общих метода получения функторных подгрупп и функторных факторгрупп. В силу предыдущей теоремы существует естественное взаимно однозначное соответствие между классами функторных подгрупп и функторных факторгрупп; поэтому можно сосредоточить внимание только на фуикторных подгруппах.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп X. С каждой группой $A \in \mathcal{A}$ свяжем две подгруппы:

$$V_{\mathfrak{X}}(A) = \bigcap_{\varphi} \operatorname{Ker} \varphi, \quad \text{где} \quad \varphi\colon A \to X \in \mathfrak{X},$$

и

$$W_{\mathfrak{X}}(A) = \sum_{\psi} \operatorname{Im} \psi, \quad \text{где} \quad \psi\colon X \to A \quad (X \in \mathfrak{X}).$$

Таким образом, φ пробегает все гомоморфизмы группы A в группы класса $\mathfrak{X}$, а ψ пробегает все гомоморфизмы групп из $\mathfrak{X}$ в группу A.

Предложение 6.2. *$V_{\mathfrak{X}}$ и $W_{\mathfrak{X}}$, где класс $\mathfrak{X}$ фиксирован, являются функторами из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{A}$.*

Пусть $\alpha\colon A \to B$ и $\varphi\colon B \to X \in \mathfrak{X}$. Тогда $\varphi\alpha$ — гомоморфизм группы A в группу X, причем, очевидно, $V_{\mathfrak{X}}(A) \subseteq \bigcap_{\varphi} \operatorname{Ker} \varphi\alpha$, если φ пробегает все гомоморфизмы $B \to X \in \mathfrak{X}$. Отсюда следует, что α отображает $V_{\mathfrak{X}}(A)$ в $\bigcap_{\varphi} \operatorname{Ker} \varphi = V_{\mathfrak{X}}(B)$. Следовательно, $V_{\mathfrak{X}}$ есть функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Чтобы доказать то же для $W_{\mathfrak{X}}$, предположим сначала, что $\alpha\colon A \to B$ и $\psi\colon X \to A$ для некоторого $X \in \mathfrak{X}$. Тогда $\alpha\psi\colon X \to B$ и, очевидно, $\sum_{\psi} \operatorname{Im} \alpha\psi \subseteq W_{\mathfrak{X}}(B)$. Это показывает, что $W_{\mathfrak{X}}(A) = \sum_{\psi} \operatorname{Im} \psi$ отображается посредством α в $W_{\mathfrak{X}}(B)$. ∎

Приведем примеры функторов $V_{\mathfrak{X}}$ и $W_{\mathfrak{X}}$.

а) Пусть $\mathfrak{X}$ состоит из всех циклических групп простого порядка p. Тогда $V_{\mathfrak{X}}(A)$ — подгруппа Фраттиии группы A [см. упр. 4 в § 3], а $W_{\mathfrak{X}}(A) = S(A)$— цоколь группы A.

б) Если $\mathfrak{X}$ состоит из всех коиечных циклических групп, то $V_{\mathfrak{X}}(A)$ — так называемая *ульмовская подгруппа* группы A, которую мы будем обозначать через $U(A)$ или A^1. В этом случае $W_{\mathfrak{X}}(A)$ — это $T(A)$.

в) Пусть теперь $\mathfrak{X}$ содержит только одну группу $Z(m)$. Тогда $V_{\mathfrak{X}}(A) = mA$ [это будет следовать из (17.2)], а $W_{\mathfrak{X}}(A) = A[m]$.

г) Если $\mathfrak{X}$ — снова класс, состоящий из одного элемента, а именно $\mathfrak{X} = \{Q\}$, то, как будет следовать из теорем гл. IV, $V_{\mathfrak{X}}(A) = T(A)$, а $W_{\mathfrak{X}}(A) = D(A)$ — максимальная делимая подгруппа группы A.

Если F_1 и F_2 — такие функторы $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, что $F_1(A) \subseteq F_2(A) \subseteq A$ для любой группы $A \in \mathcal{A}$, то будем писать

$$F_1 \leqslant F_2$$

и называть F_1 *подфунктором* функтора F_2. Отношение $\leqslant$ между функторами заданного типа определяет частичный порядок в классе $\mathcal{F}$ этих функторов. $\mathcal{F}$ обладает максимальным элементом E, которым является тождественный функтор $E(A) = A$, и минимальным элементом 0, которым служит нулевой функтор $0(A) = 0$. По очевидным причинам мы будем называть класс $\mathcal{F}$ классом *подфункторов тождественного функтора*. Если $F \in \mathcal{F}$, то функтор F^* [определенный в теореме 6.1] называется *факторфунктором тождественного функтора*.

В $\mathcal{F}$ отношение $\leqslant$ на самом деле задает структурный порядок. Действительно, если $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, то отображения

$$A \mapsto F_1(A) \cap F_2(A) \quad \text{и} \quad A \mapsto F_1(A) + F_2(A)$$

порождают подфункторы тождественного функтора, представляющие собой $\inf(F_1, F_2)$ и $\sup(F_1, F_2)$. Эти подфункторы можно обозначить соответственно через $F_1 \wedge F_2$ и $F_1 \vee F_2$. Кроме того, если F_i $(i \in I)$ — некоторое семейство функторов из $\mathcal{F}$, то формулы

$$\left(\bigwedge_i F_i\right)(A) = \bigcap_i F_i(A) \quad \text{и} \quad \left(\bigvee_i F_i\right)(A) = \sum_i F_i(A)$$

определяют, как легко проверить, inf и sup этого семейства.

Кроме теоретико-структурных операций, можно естественным образом ввести в $\mathcal{F}$ умножение: для $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ полагаем $(F_1F_2)(A) = F_1(F_2(A))$, т. е. произведение F_1F_2 функторов F_1 и F_2 понимается в обычном смысле. Очевидно, $F_1F_2 \in \mathcal{F}$.

Если дан подфунктор F тождественного функтора, то следующим образом с помощью трансфинитной индукции определим для порядковых чисел σ итерированные функторы F^σ. Положим $F^0 = E$, и пусть

$$F^{\sigma+1} = FF^\sigma.$$

Для предельного порядкового числа σ положим

$$F^\sigma = \bigwedge_{\rho<\sigma} F^\rho.$$

[Очевидно, $F^\sigma(\alpha)$ для любого $\alpha\colon A \to B$ является ограничением α на $F^\sigma(A)$.] Если, например, F — это функтор $V_{\mathfrak{X}}$ из примера а), то F^ω, где ω — первое предельное порядковое число, — это функтор U из примера б).

В дальнейшем будет играть очень важную роль ульмовская подгруппа $U(A)$ группы A, введенная в примере б). Другое ее определение таково:

$$U(A) = \bigcap_n nA.$$

Эквивалентность этого определения с данным в примере б) вытекает из результатов гл. III. Точнее, $U(A)$ называется *первой ульмовской подгруппой* группы A, в то время как σ-й итерированный функтор $U^\sigma(A) = A^\sigma$ дает σ-ю *ульмовскую подгруппу* группы A. Факторгруппа

$$U^\sigma(A)/U^{\sigma+1}(A) = U_\sigma(A) = A_\sigma \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

называется *σ-м ульмовским фактором* группы A; в частности, $A/A^1 = A_0$ — нулевой ульмовский фактор группы A. Об ульмовских подгруппах и ульмовских факторах см. § 37.

Заметим, что если F_1, F_2 — подфункторы тождественного функтора, причем $F_1 \leqslant F_2$, то вложения $\varphi_A\colon F_1(A) \to F_2(A)$ дают естественное преобразование $\Phi\colon F_1 \to F_2$, а соответствующие им отображения $\varphi^*_A\colon A/F_1(A) \to A/F_2(A)$ определяют естественное преобразование $\Phi^*\colon F_1^* \to F_2^*$.

Упражнения

1. Доказать, что для подфункторов F, G, H тождественного функтора справедливы соотношения $(FG)H = F(GH)$, $FG \leqslant F \wedge G$, а если $F \leqslant H$, то $F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge H$.

2. Если T, S — функторы из примеров 1 и 2, то $T^2 = T$, $S^2 = S$, $TS = ST = S$.

3. Для подфунктора F тождественного функтора из $C \subseteq A$ вытекает, что

$$F(C) \subseteq C \cap F(A) \text{ и } (F(A) + C)/C \subseteq F(A/C).$$

4. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{B}$ — два класса групп.

(а) Если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{B}$, то $V_{\mathfrak{B}} \leqslant V_{\mathfrak{X}}$ и $W_{\mathfrak{X}} \leqslant W_{\mathfrak{B}}$.

(б) Всегда

$$V_{\mathfrak{X}\cup\mathfrak{B}} = V_{\mathfrak{X}} \wedge V_{\mathfrak{B}} \quad \text{и} \quad W_{\mathfrak{X}\cup\mathfrak{B}} = W_{\mathfrak{X}} \vee W_{\mathfrak{B}}.$$

5. Если $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, то через $\mathfrak{X}_s$ и $\mathfrak{X}_q$ обозначим соответственно класс всех подгрупп и класс всех факторгрупп групп из $\mathfrak{X}$. Тогда

$$V_{\mathfrak{X}_s} = V_{\mathfrak{X}}, \; V_{\mathfrak{X}_q} \leqslant V_{\mathfrak{X}}, \; W_{\mathfrak{X}_q} = W_{\mathfrak{X}}, \; W_{\mathfrak{X}_s} \leqslant W_{\mathfrak{X}}.$$

6. Если F — подфунктор тождественного функтора, а ρ, σ — порядковые числа, то $F^\rho F^\sigma = F^{\sigma+\rho}$.

7. Для любого класса групп $\mathfrak{X}$ и любой пары ρ, σ порядковых чисел, где $\rho \leqslant \sigma$, при всяком $A \in \mathscr{A}$ выполнены соотношения

$$V^\rho_{\mathfrak{X}}(A/V^\sigma_{\mathfrak{X}}(A)) = V^\rho_{\mathfrak{X}}(A)/V^\sigma_{\mathfrak{X}}(A)$$

и

$$W_{\mathfrak{X}}^{\rho}(A/W_{\mathfrak{X}}^{\sigma}(A)) = W_{\mathfrak{X}}^{\rho}(A)/W_{\mathfrak{X}}^{\sigma}(A).$$

8. Пусть F_σ, где σ пробегает все порядковые числа, меньшие некоторого τ, — подфункторы тождественного функтора. Определить бесконечное произведение $\ldots F_\sigma \ldots F_1 F_0$ $(\sigma < \tau)$ и показать, что это тоже подфунктор тождественного функтора.

9.* Используя понятие прямой суммы (см. § 8), проверить для подфунктора F тождественного функтора формулу

$$F(\bigoplus_i A_i) = \bigoplus_i F(A_i).$$

Показать, что для прямых произведений аналогичное равенство уже не имеет места.

§ 7. Топологии в группах

Топология в абелевых группах может быть введена различными путями, естественными в том или другом смысле. Получающиеся топологии не обязательно хаусдорфовы; в некоторых из них даже групповая операция не непрерывна. Важность топологий в абелевых группах будет видна из дальнейшего изложения.

Наиболее существенными среди топологий, которые мы здесь рассмотрим, являются *линейные топологии*. Это такие топологии, что имеется база [фундаментальная система] окрестностей нуля, состоящая из подгрупп, причем смежные классы по этим подгруппам образуют базу открытых множеств. Чтобы сформулировать наше определение в достаточно общем виде, возьмем дуальный идеал (т. е. фильтр) $\mathbf{D}$ в структуре $\mathbf{L}(A)$ всех подгрупп группы A и объявим подгруппы U группы A, лежащие в $\mathbf{D}$, базой открытых окрестностей нуля. Тогда смежные классы $a + U$ $(U \in \mathbf{D})$ будут базой открытых множеств элемента a. Так как пересечение двух смежных классов $(a_1 + U_1) \cap (a_2 + U_2)$ или пусто, или является смежным классом по подгруппе $U_1 \cap U_2$, а $U_1 \cap U_2 \in \mathbf{D}$ при $U_1, U_2 \in \mathbf{D}$, то все открытые множества будут объединениями смежных классов $a + U$, где $U \in \mathbf{D}$. Непрерывность групповых операций очевидна в силу простого замечания, что из включения $x - y \in a + U$ следует $(x + U) - (y + U) \subseteq a + U$. Возникающую таким образом топологию мы назовем $\mathbf{D}$-*топологией* группы A. Очевидно, *она хаусдорфова тогда и только тогда, когда*

$$\bigcap_{U \in \mathbf{D}} U = 0,$$

и дискретна тогда и только тогда, когда $0 \in \mathbf{D}$.

В некоторых случаях рассматривается топология, удовлетворяющая *первой аксиоме счетности*, т. е. такая, что существует счетная база открытых окрестностей нуля. Если $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ — такая система окрестностей, то $U_1, U_1 \cap U_2, \ldots, U_1 \cap \ldots \cap U_n, \ldots$ —

тоже; таким образом, в данном случае мы можем без ограничения общности считать последовательность убывающей.

Открытая подгруппа B обязательно замкнута. В самом деле, ее дополнением в группе служит объединение смежных классов $a+B$ $(a \notin B)$; эти смежные классы — открытые множества, и тем же свойством обладает их объединение. Следовательно, подгруппы $U \in \mathbf{D}$ одновременно открыты и замкнуты. Отсюда получается

Предложение 7.1. *Если* $\mathbf{D}$ — *дуальный идеал структуры* $\mathbf{L}(A)$ *всех подгрупп группы* A *и* $\mathbf{D}$-*топология группы* A *хаусдорфова, то относительно этой топологии* A *является* 0-*мерной топологической группой.* ∎

Важное значение имеют следующие частные случаи.

1. *Z-адическая топология*, где базу окрестностей нуля образуют подгруппы nA $(n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0)$. Это $\mathbf{D}$-топология, где $\mathbf{D}$ состоит из всех подгрупп $U \subseteq A$, для которых в A/U порядки элементов ограничены в совокупности [1]). Z-топология является хаусдорфовой тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_n nA = 0,$$

т. е. первая ульмовская подгруппа $U(A)$ группы A нулевая. Эта топология дискретна тогда и только тогда, когда $nA = 0$ для некоторого n, т. е. группа A — ограниченная. Легко видеть, что замыкание B^- подгруппы B задается формулой

$$B^- = \bigcap_n (B+nA),$$

и подгруппа B замкнута тогда и только тогда, когда первая ульмовская подгруппа группы A/B равна нулю.

2. *p-адическая топология*, где базу окрестностей нуля образуют лишь подгруппы p^kA $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. [Здесь дуальный идеал $\mathbf{D}$ — это множество всех подгрупп $U \subseteq A$, для которых A/U — ограниченные p-группы.] Справедлив следующий простой результат.

Теорема 7.2. *Для группы* A *эквивалентны условия*:

а) *p-адическая топология группы* A *хаусдорфова*;

б) A *не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты*;

в) $\| a \| = \exp(-h_p(a))$ *является нормой на группе* A $(a \in A)$;

г) $\delta(a, b) = \| a - b \|$ *служит метрикой на группе* A $(a, b \in A)$, *определяющей p-адическую топологию.*

Так как p-адическая топология группы A хаусдорфова тогда и только тогда, когда $\bigcap p^kA = 0$, эквивалентность условий а) и б) очевидна. Из б) следует, что $h_p(a) = \infty$ равносильно тому, что $a = 0$; учитывая также неравенство $h_p(a+b) \geqslant \min(h_p(a), h_p(b))$, получаем, что:

[1]) Группы, в которых порядки элементов ограничены в совокупности, мы будем в дальнейшем называть *ограниченными*. — *Прим. перев.*

1) $\| a \| \geqslant 0$ для любого $a \in A$, 2) $\| a \| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$; 3) $\| a + b \| \leqslant \max (\| a \|, \| b \|)$ для всех $a, b \in A$. Таким образом, $\| a \|$ — норма на группе A. Чтобы показать, что из в) вытекает г), заметим, что из свойств нормы следует, что $\delta (a, b) = \| a - b \|$ — метрика на A, при которой база открытых множеств состоит из внутренностей шаров радиуса ε ($\varepsilon > 0$), т. е. из множеств $\{b \in A \mid \delta (a, b) < \exp (-k + 1)\} = a + p^k A$. Таким образом, из в) следует г), а из г) очевидным образом вытекает а). ∎

В p-группе A Z-адическая и p-адическая топологии совпадают. В самом деле, если A есть p-группа и $(m, p) = 1$, то $mA = A$. Это простое следствие из того, что было показано в примере 2 из § 4.

3. *Прюферова топология*, которая определяется с помощью дуального идеала $\mathbf{D}$, состоящего из всех подгрупп $U \subseteq A$, для которых в факторгруппе A/U выполнено условие минимальности (см. § 25). Это всегда хаусдорфова топология, в которой все подгруппы замкнуты.

4. *Топология конечных индексов*, где базу окрестностей нуля составляют подгруппы U группы A, имеющие конечный индекс. Эта топология является хаусдорфовой тогда и только тогда, когда первая ульмовская подгруппа группы A является нулевой. Она грубее, чем Z-адическая и прюферова топологии.

Другой общий метод превращения группы A в топологическое пространство состоит в том, что подгруппы S группы A, принадлежащие некоторому множеству $\mathfrak{S}$, объявляются замкнутыми, а смежные классы $a + S$ ($a \in A$) рассматриваются как подбаза замкнутых множеств в A. В этом случае легко видеть, что отображения

$$x \mapsto x + a, \quad x \mapsto -x$$

(для каждого $a \in A$) являются непрерывными и открытыми. Однако в общем случае сложение не является непрерывным одновременно по обоим переменным. Следовательно, A оказывается [так называемой *полутопологической*, но] нетопологической группой в этой топологии, которую мы будем называть *замкнутой $\mathfrak{S}$-топологией*. Чтобы охарактеризовать случаи, когда A — топологическая группа, докажем сначала лемму.

Лемма 7.3 (Нейман Б.). *Пусть $S_1, \ldots, S_n$ — такие подгруппы группы A, что A является теоретико-множественным объединением конечного числа смежных классов*

$$A = (a_1 + S_1) \cup \ldots \cup (a_n + S_n) \ (a_i \in A). \tag{1}$$

Тогда одна из подгрупп $S_1, \ldots, S_n$ имеет в A конечный индекс.

Предположим, что представление (1) несократимо в том смысле, что ни один из смежных классов $a_i + S_i$ не содержится в объединении остальных. Если все S_i совпадают, то S_i имеет в A индекс n. Пусть среди подгрупп $S_1, \ldots, S_n$ имеется $k \geqslant 2$ различных, и пусть для случая $k - 1$ различных подгрупп S_i утверждение уже доказано. Пусть подгруппы $S_1, \ldots, S_m$ отличны от $S_{m+1} = \ldots = S_n$ ($m < n$).

В силу несократимости некоторый смежный класс $x+S_n$ не содержится в $\bigcup_{i=m+1}^{n}(a_i+S_i)$, поэтому $x+S_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{m}(a_i+S_i)$. Но тогда

$$A=\bigcup_{i=1}^{m}(a_i+S_i)\cup\bigcup_{i=1}^{m}(a_{m+1}-x+a_i+S_i)\cup\ldots\cup\bigcup_{i=1}^{m}(a_n-x+a_i+S_i),$$

и в этом выражении участвует только $k-1$ различных подгрупп $S_1, \ldots, S_m$, так что утверждение леммы следует из индуктивного предположения. ∎

Следующий результат показывает, что если топология на группе A, полученная с помощью множества $\mathfrak{S}$ замкнутых подгрупп, превращает A в топологическую группу, то это линейная топология, определяемая замкнутыми подгруппами из $\mathfrak{S}$, имеющими конечный индекс [эти подгруппы — открытые множества!]. В приводимой ниже теореме топология не обязательно хаусдорфова.

Предложение 7.4 (Корнер). *Пусть $\mathfrak{S}$ — множество подгрупп S группы A, и пусть $\mathfrak{S}_f$ состоит из всех $S \in \mathfrak{S}$, имеющих конечный индекс в A. Тогда A является топологической группой относительно замкнутой $\mathfrak{S}$-топологии в том и только в том случае, когда это замкнутая $\mathfrak{S}_f$-топология [т. е. линейная топология, получающаяся путем объявления подгрупп $S \in \mathfrak{S}_f$ открытыми].*

Требует доказательства только необходимость условия. Пусть A — топологическая группа относительно замкнутой $\mathfrak{S}$-топологии. Если дано открытое множество $V=A\setminus(a+T)$ $(a\in A,\ T\in\mathfrak{S})$, содержащее 0, то имеется такая открытая окрестность нуля U, что $U-U\subseteq V$. Можно написать

$$U=A\setminus\bigcup_{i=1}^{n}(a_i+S_i),$$

где $a_i\in A$, $S_i\in\mathfrak{S}$, так как всякое открытое множество является объединением открытых множеств этого вида. Так как $0\in U$, то $0\notin\bigcup_{i=1}^{n}(a_i+S_i)$. Из $U-U\subseteq V$ для любого $u\in U$ имеем $u-a\notin U$, поэтому $u\in\bigcup_{i=1}^{n}(a+a_i+S_i)$ и

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i+S_i)\cup\bigcup_{i=1}^{n}(a+a_i+S_i). \tag{2}$$

Пусть подгруппы $S_1, \ldots, S_m$ имеют конечный индекс, а подгруппы $S_{m+1}, \ldots, S_n$ — бесконечный индекс в A; по лемме 7.3 $1\leqslant m\leqslant n$. Подгруппа $S=S_1\cap\ldots\cap S_m$ снова имеет конечный индекс в A. Докажем, что $S\subseteq V$. В самом деле, если это не выполнено, возьмем $b\in S\cap(a+T)$. Тогда для $i=1, \ldots, m$ получим $a_i+S_i=b+$

$+ a_i + S_i$, причем эти множества не пересекаются с S, так как $0 \in U$. Беря пересечение правой части равенства (2) с S и заменяя a на b, получаем

$$S = \bigcup_{i=m+1}^{n} [(a_i + S_i) \cap S] \cup \bigcup_{i=m+1}^{n} [(b + a_i + S_i) \cap S].$$

Здесь непустые пересечения являются смежными классами по подгруппам $S \cap S_i$, поэтому в силу леммы 7.3 некоторая подгруппа $S \cap S_j$, где $m + 1 \leqslant j \leqslant n$, имеет конечный индекс в S. Тогда $S \cap S_j$, а значит и S_j, имеет конечный индекс в A. Полученное противоречие доказывает, что $S \subseteq V$. Таким образом, все открытые множества V вида $A \setminus (a + T)$ $(T \in \mathfrak{S})$ содержат конечное пересечение $S_1 \cap \ldots \quad S_m$, где $S_i \in \mathfrak{S}_f$, откуда следует требуемый результат. ∎

В силу предложения 7.4 мы можем не рассматривать замкнутые $\mathfrak{S}$-топологии, если будем требовать непрерывность групповой операции.

Следуя Шарлю [4], введем понятие функторных топологий. Предположим, что на всякой группе $A \in \mathcal{A}$ определена топология $t(A)$, при которой A является топологической группой. Назовем $t = \{t(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ *функторной топологией*, если всякий гомоморфизм в $\mathcal{A}$ непрерывен. В этом смысле Z-адическая, p-адическая, прюферова топологии и топология конечных индексов являются функторными.

Более общий способ получения функторной топологии состоит в том, что выбирается класс $\mathfrak{X}$ групп и в качестве подбазы открытых окрестностей нуля в A берутся подгруппы Ker φ, где $\varphi \colon A \to X \in \mathfrak{X}$. Это дает линейную топологию на A, которая является хаусдорфовой, если гомоморфизмов φ достаточно много в том смысле, что для всякого $a \in A$, $a \neq 0$, существуют такие $X \in \mathfrak{X}$ и $\varphi \colon A \to X$, что $\varphi a \neq 0$.

Для ориентации читателя приведем теперь результат, показывающий, что во всякой бесконечной абелевой группе можно ввести недискретиую хаусдорфову топологию. Этот результат важен в теоретическом отношеиии, но использоваться не будет.

Теорема 7.5 (Кертес и Селе [1]). *Каждая бесконечная абелева группа может быть превращена в недискретную хаусдорфову топологическую группу.*

В доказательстве нам понадобятся некоторые простые результаты, которые будут доказаны только позже.

Пусть A — бесконечная группа. Прюферова топология превращает A в топологическую группу. Эта топология дискретна тогда и только тогда, когда в самой группе A выполнено условие минимальности. В этом случае по теореме 25.1 A содержит подгруппу типа p^∞. Вложение группы $Z(p^\infty)$ в группу комплексных чисел z, где $|z| = 1$, индуцирует в $Z(p^\infty)$ иедискретную хаусдорфову топологию, и с помощью этого получается недискретная топология на A. ∎ ∎

Упражнения

1. Во всякой топологической группе A подгруппа $A[n]$ замкнута.

2. (а) Доказать, что всякий гомоморфизм групп непрерывен в p-адической топологии, в прюферовой топологии и в топологии конечных индексов.

(б) В Z-адической, p-адической, прюферовой топологиях и в топологии конечных индексов всякий эпиморфизм является открытым отображением.

(в) Z-адическая топология на подгруппе группы A тоньше, чем топология, индуцированная на ней Z-адической топологией группы A.

3. (а) Доказать, что Z-адическая и p-адическая топологии на группе A совпадают, если $qA = A$ для любого простого числа $q \neq p$.

(б) Пусть p и q — различные простые числа. На каких группах p-адическая и q-адическая топологии совпадают?

4. В p-адической топологии группа J_p компактна.

5. Показать, что всякая линейная топология является **D**-топологией для некоторого дуального идеала **D** структуры подгрупп.

6. Пусть B — подгруппа топологической группы A. Доказать, что

(а) если подгруппа B замкнута, то естественное отображение $A \to A/B$ является открытым непрерывным гомоморфизмом [напомним, что в A/B окрестностями служат образы окрестностей в группе A];

(б) группа A/B дискретна тогда и только тогда, когда подгруппа B открыта;

(в) если α: $A \to C$ — открытый непрерывный эпиморфизм, то имеет место топологический изоморфизм $A/\operatorname{Ker}\alpha \cong C$.

7. Замкнутая подгруппа B группы A является нигде не плотной [т. е. такой, что множество $A \setminus B$ плотно] тогда и только тогда, когда B — не открытая подгруппа.

8. Пусть на группе A введена линейная топология. Подгруппа B замкнута тогда и только тогда, когда B — пересечение открытых подгрупп группы A.

9. Если B и C — замкнутые подгруппы группы A, на которой определена линейная топология, то подгруппа $B+C$ не обязательно замкнута.

10. (а) Подгруппа B плотна в **D**-топологии группы A тогда и только тогда, когда $B + U = A$ для любой подгруппы $U \in$ **D**.

(б)* Подгруппа B группы A плотна в Z-адической топологии [или в топологии конечных индексов] тогда и только тогда, когда A/B — делимая группа (см. § 20).

11.* Недискретная линейная хаусдорфова топология может быть определена на группе тогда и только тогда, когда в этой группе не выполнено условие минимальности.

12.* Каждая бесконечная группа допускает инвариантную метрику. [*Указание*: это эквивалентно тому, что существует недискретная топология, удовлетворяющая первой аксиоме счетности; если a имеет бесконечный порядок, взять $\langle 2^n a \rangle$ в качестве базы; если группа обладает бесконечным цоколем, взять в качестве базы бесконечную убывающую цепочку типа ω с нулевым пересечением; если группа содержит подгруппу вида $Z(p^\infty)$, провести такое же рассуждение, как в теореме 7.5.]

Замечания

Коммутативные группы названы абелевыми в честь норвежского математика Нильса Хенрика Абеля (1802—1829), который изучал алгебраические уравнения с коммутативными группами Галуа. Фактически конечная коммутативная структура, подобная группе, рассматривалась Гауссом в 1801 году в связи с квадратичными формами [им было доказано существование разложения вида, указанного в теореме 8.4]. Но только в последнем десятилетии XIX века началось более или менее систематическое изучение конечных абелевых групп. Затем в теории групп произошел отказ от ограничения конечности, и Леви в Habilitationsschrift [1] приступил к изучению бесконечных абелевых групп. И Леви, и несколько позже Прюфер [в своих эпохальных статьях [1], [2], [3]] ограничивались счетными группами, но на самом деле в большей части доказательств счетность не использовалась. Начиная с 30-х годов этого века абелевы группы стали привлекать серьезное внимание. Особенно значительными были работы Бэра, Куликова и Селе. В конце 50-х годов большое влияние на развитие теории абелевых групп стал оказывать гомологический подход.

Теорема 1.1 достаточно элементарна, но очень важна. В силу этой теоремы структурная теория абелевых групп расщепляется на теорию периодических групп, теорию групп без кручения и исследование того, как такие группы склеиваются, образуя смешанные группы. Проследить историю теоремы 1.1 трудно. Можно заметить, что эта теорема не обобщается на случай произвольных модулей. Если называть «периодическими» элементы a из R-модуля M, для которых $o(a) \neq 0$, то в общем случае не будет верным, что периодические элементы образуют подмодуль. Однако известно, что кольцо R обладает тем свойством, что во всяком R-модуле M периодические элементы образуют подмодуль T, такой, что M/T — модуль без кручения , тогда и только тогда, когда R — левая область Оре [т. е. область целостности, в которой выполнено левое условие Оре: $\mathsf{L}_1 \cap \mathsf{L}_2 \neq 0$ для любых двух ненулевых левых идеалов L_1, L_2 кольца R]. Другое определение «периодичности» см. в работе Хаттори [Hattori A., *Nagoya Math. J.*, **17**, 147—158 (1960)]. Диксон [Dickson S., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121**, 223—235 (1966)] дает систематическое изложение того, что он называет «теорией кручения» в абелевых категориях. См. также работу Маранды [Maranda J., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **110**, 98—135 (1964)], где рассматриваются периодические прерадикалы.

Проблема 1. Перечислить функторные подгруппы в важнейших подкатегориях категории $\mathcal{A}$.

Проблема 2. Описать функторные линейные топологии для различных категорий абелевых групп [элементарных групп, ограниченных групп, периодических групп и т. д.].

Глава II

ПРЯМЫЕ СУММЫ

Понятие прямой суммы в теории абелевых групп крайне важно. Это обусловлено двумя факторами. Во-первых, если группа разлагается в прямую сумму, ее можно изучать, исследуя компоненты в прямой сумме, которые во многих случаях устроены проще, чем сама группа. Во-вторых, можно строить новые группы, беря прямые суммы уже известных групп. Мы увидим ниже, что почти все структурные теоремы об абелевых группах включают в себя, явно или неявно, некоторое прямое разложение.

Существуют два способа введения прямых сумм, а именно можно рассматривать внутреннюю и внешнюю прямую сумму. Здесь будут рассматриваться оба эти понятия и их основные свойства. Внешнее определение приводит к полным прямым суммам, называемым прямыми произведениями, которые тоже будут для нас чрезвычайно важны. Мы исследуем также универсальный и коуниверсальный квадраты.

Далее, мы дадим определение прямого и обратного предела, которые теперь играют все возрастающую роль в теории абелевых групп. Нам часто придется использовать их в различных вопросах.

В последнем параграфе этой главы речь будет идти о пополнениях относительно линейной топологии.

§ 8. Прямые суммы и прямые произведения

Пусть B, C — подгруппы группы A со свойствами:

1) $B + C = A$;

2) $B \cap C = 0$.

В этом случае мы будем называть группу A [*внутренней*] *прямой суммой* ее подгрупп B, C и писать

$$A = B \oplus C.$$

Условие 1) означает, что всякий элемент $a \in A$ может быть записан в виде $a = b + c$ ($b \in B$, $c \in C$), а из условия 2) вытекает, что эта запись единственна. В самом деле, если $a = b + c = b' + c'$ ($b' \in B$, $c' \in C$), то $b - b' = c' - c \in B \cap C = 0$. С другой стороны, из единственности записи $a = b + c$ следует, что не существует ненулевого элемента $b + 0 = 0 + c$, лежащего одновременно в B и в C.

Если выполнено условие 2), будем говорить, что подгруппы B и C *не пересекаются*. Это не согласуется с соответствующим теоретико-множественным понятием, но недоразумений не вызовет.

Пусть B_i ($i \in I$) — семейство подгрупп группы A, удовлетворяющих условиям:

1) $\sum B_i = A$ [т. е. все подгруппы B_i вместе порождают группу A];

2) для любого $i \in I$

$$B_i \cap \sum_{j \neq i} B_j = 0.$$

Тогда говорят, что группа A — *прямая сумма* своих подгрупп B_i, и пишут

$$A = \bigoplus_{i \in I} B_i$$

или

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n,$$

если $I = \{1, \ldots, n\}$. Здесь опять каждый элемент $a \in A$ может быть записан единственным образом в виде $a = b_{i_1} + \ldots + b_{i_k}$, где $b_{i_j} \neq 0$ — элементы из различных *компонент* B_{i_j} $(j = 1, \ldots, k,\ k \geqslant 0)$. Так как каждый элемент группы $\sum B_i$ содержится в подгруппе, порожденной конечным числом подгрупп B_i, условие 2) можно заменить по виду более слабым условием

$$B_i \cap (B_{i_1} + \ldots + B_{i_k}) = 0,$$

где $i_j \neq i$, k — натуральное число.

Пусть $a \in A = B \oplus C$, и пусть $a = b + c$, где $b \in B$, $c \in C$. Непосредственно видно, что отображения

$$\pi\colon a \mapsto b \text{ и } \theta\colon a \mapsto c$$

являются эпиморфизмами группы A на B и C соответственно. Так как $\pi b = b$, $\pi c = 0$, $\theta c = c$, $\theta b = 0$ и $\pi a + \theta a = a$, эпиморфизмы π, θ группы A обладают свойствами

$$\pi^2 = \pi,\ \theta^2 = \theta,\ \theta\pi = \pi\theta = 0,\ \pi + \theta = 1_A. \qquad (1)$$

Если всякий идемпотентный эндоморфизм называть *проекцией* и называть *ортогональными* эндоморфизмы, произведение которых [в любом порядке] равно нулю, то (1) будет означать, что *прямое разложение* $A = B \oplus C$ *определяет две ортогональные проекции группы* A, *сумма которых равна* 1_A. Обратно, всякие два эндоморфизма π, θ группы A, удовлетворяющие условиям (1), дают прямое разложение

$$A = \pi A \oplus \theta A.$$

В самом деле, из идемпотентности и ортогональности π и θ вытекает, что элемент, лежащий одновременно в πA и θA, должен при π и θ переходить в себя и в 0, так что $\pi A \cap \theta A = 0$, а в силу того, что $\pi + \theta = 1_A$, имеет место $\pi A + \theta A = A$.

Даже если A — прямая сумма нескольких [больше двух] подгрупп, $A = \oplus B_i$, это разложение может быть описано в терминах попарно ортогональных проекций. Здесь i-я проекция π_i: $A \to B_i$ ставит в соответствие элементу $a = b_{i_1} + \ldots + b_{i_k}$ элемент b_i из B_i [причем, конечно, может быть $b_i = 0$]. Тогда

а) $$\pi_i\pi_j = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j, \\ \pi_i & \text{при} \quad i = j; \end{cases}$$

б) для любого элемента $a \in A$ почти все элементы $\pi_i a$ равны нулю, а их сумма совпадает с a. Обратно, если π_i $(i \in I)$ — множество эндоморфизмов группы A, удовлетворяющих условиям а), б), то A, как легко проверить, есть прямая сумма подгрупп $\pi_i A$.

Подгруппа B группы A называется *прямым слагаемым* группы A, если существует такая подгруппа $C \subseteq A$, что $A = B \oplus C$. В этом случае C называется *дополнительным прямым слагаемым* или просто *дополнением* подгруппы B в A.

Приведем некоторые основные свойства прямых сумм.

а) Если $A = B \oplus C$, то $C \cong A/B$. Таким образом, дополнение подгруппы B в группе A определено однозначно с точностью до изоморфизма.

б) Если $A = B \oplus C$ и G — подгруппа группы A, содержащая B, то

$$G = B \oplus (G \cap C).$$

в) Если $a \in A = B \oplus C$ и $a = b + c$ $(b \in B,\ c \in C)$, то $o(a)$ — наименьшее общее кратное чисел $o(b)$ и $o(c)$.

г) Если $A = \bigoplus_i B_i$ и $C_i \subseteq B_i$ для каждого i, то $\sum C_i = \oplus C_i$. Это собственная подгруппа группы A, если $C_i \subset B_i$ хотя бы при одном i.

д) Если $A = \bigoplus_i B_i$, где каждая группа B_i является прямой суммой, $B_i = \bigoplus_j B_{ij}$, то

$$A = \bigoplus_i \bigoplus_j B_{ij}.$$

Последнее разложение называется *продолжением* исходного разложения группы A.

е) Если $A = \bigoplus_i \bigoplus_j B_{ij}$, то $A = \bigoplus_i B_i$, где $B_i = \bigoplus_j B_{ij}$.

Два прямых разложения группы A, $A = \bigoplus_i B_i$ и $A = \bigoplus_j C_j$, называются *изоморфными*, если между слагаемыми B_i и C_j можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие друг другу группы будут изоморфными.

Точную последовательность $0 \to B \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} C \to 0$ будем называть *расщепляющейся*, если $\operatorname{Im} \alpha$ — прямое слагаемое группы A.

Теперь дадим определение внешней прямой суммы. Пусть даны группы B и C. Мы хотим получить группу A, которая является прямой суммой двух таких своих подгрупп B' и C', что $B' \cong B$, $C' \cong C$. Множество всех пар (b, c), где $b \in B$, $c \in C$, образует группу A, если считать $(b_1, c_1) = (b_2, c_2)$ тогда и только тогда, когда $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$,

$$(b_1, c_1) + (b_2, c_2) = (b_1 + b_2, c_1 + c_2).$$

Соответствия $b \mapsto (b, 0)$ и $c \mapsto (0, c)$ представляют собой изоморфизмы между группами B, C и подгруппами B', C' группы A. Имеет место равенство $A = B' \oplus C'$. Если считать B, C отождествленными с B', C' с помощью указанных выше изоморфизмов, то можно написать $A = B \oplus C$ и назвать A [*внешней*] *прямой суммой* групп B и C.

Пусть B_i $(i \in I)$ — множество групп. *Вектором* $(\ldots, b_i, \ldots)$ над этим множеством групп B_i называется вектор, i-я *координата* которого при каждом $i \in I$ — это некоторый элемент $b_i \in B_i$. Такой вектор можно также интерпретировать как функцию f, определенную на множестве I и такую, что $f(i) = b_i \in B_i$ для каждого $i \in I$. Равенство и сложение векторов определяются покоординатно [т. е. для функций — поточечно]. Таким путем множество всех векторов превращается в группу C, называемую *прямым произведением* [*декартовой суммой* или *полной прямой суммой*] групп B_i:

$$C = \prod_{i \in I} B_i.$$

Соответствие

$$\rho_i\colon b_i \mapsto (\ldots, 0, b_i, 0, \ldots),$$

где b_i стоит на i-м месте и 0 — на всех остальных местах, является изоморфизмом между группой B_i и подгруппой B_i' группы C. Легко видеть, что группы B_i' $(i \in I)$ порождают внутри C группу A всех векторов $(\ldots, b_i, \ldots)$, у которых $b_i = 0$ почти для всех $i \in I$, причем A является прямой суммой подгрупп B_i'. Группа A также называется [*внешней*] *прямой суммой* групп B_i, $A = \bigoplus_i B_i$. Очевидно, $A = C$ тогда и только тогда, когда множество I конечно.

Мы предоставляем читателю показать, что как прямая сумма, так и прямое произведение однозначно с точностью до изоморфизма определяются множеством компонент B_i.

Если A — группа и $\mathfrak{m}$ — кардинальное число, то через $\bigoplus_{\mathfrak{m}} A$ будем обозначать прямую сумму $\mathfrak{m}$ групп, изоморфных A, а через $\prod_{\mathfrak{m}} A = A^{\mathfrak{m}}$ — прямое произведение $\mathfrak{m}$ таких групп. Аналогично через A^I будем обозначать прямое произведение групп, изоморфных группе A и занумерованных с помощью индексов из множества I. Очевидно, A^I — это группа всех функций, определенных на множестве I и принимающих значения в группе A, причем $A^I \cong A^{|I|}$.

Внешние прямые суммы и прямые произведения могут быть также описаны в терминах систем гомоморфизмов. Функции

$$\rho_B : b \mapsto (b,\ 0),\quad \rho_C : c \mapsto (0,\ c),$$
$$\pi_B : (b,\ c) \mapsto b,\quad \pi_C : (b,\ c) \mapsto c$$

являются гомоморфизмами, указанными на диаграмме

$$B \underset{\pi_B}{\overset{\rho_B}{\rightleftarrows}} B \oplus C \underset{\pi_C}{\overset{\rho_C}{\leftrightarrows}} C$$

и называемыми [*координатными*] *вложениями* и *проекциями* соответственно. Они удовлетворяют соотношениям

$$\pi_B\rho_B = 1_B,\quad \pi_C\rho_C = 1_C,\quad \pi_B\rho_C = \pi_C\rho_B = 0,\quad \rho_B\pi_B + \rho_C\pi_C = 1_{B\oplus C}.$$

Вообще, прямая сумма [прямое произведение] групп B_i $(i \in I)$ определяет для каждого $i \in I$ вложение ρ_i и проекцию π_i,

$$B_i \xrightarrow{\rho_i} \oplus B_i \xrightarrow{\pi_i} B_i \quad (B_i \xrightarrow{\rho_i} \prod B_i \xrightarrow{\pi_i} B_i),$$

где $\rho_i b_i = (\ldots,\ 0,\ b_i,\ 0,\ \ldots)$, $\pi_i(\ldots,\ b_j,\ \ldots,\ b_i,\ \ldots) = b_i$, удовлетворяющие условиям

а) $$\pi_i\rho_j = \begin{cases} 1_{B_i} & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

б) если множество I конечно, $I = \{1,\ \ldots,\ n\}$, и $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$, то $\rho_1\pi_1 + \ldots + \rho_n\pi_n = 1_B$.

Если I бесконечно, то для прямой суммы вместо условия б) получаем

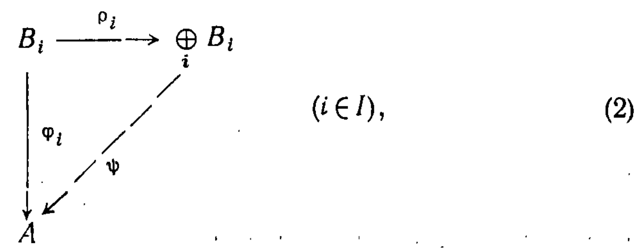
б′) каждый элемент $b \in \oplus B_i$ записывается в виде конечной суммы $b = \rho_{i_1}\pi_{i_1} b + \ldots + \rho_{i_n}\pi_{i_n} b$,

а для прямого произведения получаем

б″) если дано множество элементов $\{b_i\}$, где ровно одно b_i принадлежит B_i для всякого $i \in I$, то существует единственный элемент $b \in \prod B_i$, для которого $\pi_i b = b_i$ при каждом i.

Следующие два результата выявляют полезные общие свойства прямых сумм и прямых произведений.

Теорема 8.1. *Пусть* $\varphi_i\colon B_i \to A$ *— гомоморфизмы,* $i \in I$. *Тогда в диаграммах*



где ρ_i — вложения, на место пунктирной стрелки может быть поставлен однозначно определенный гомоморфизм ψ [не зависящий от i] *так, что все диаграммы превратятся в коммутативные.*

Запишем элемент $b \in \oplus B_i$ в виде $b = \rho_1\pi_1 b + \ldots + \rho_k\pi_k b$ [где π_i — соответствующие проекции] и положим $\psi b = \varphi_1\pi_1 b + \ldots + \varphi_k\pi_k b$. Легко видеть, что ψ — гомоморфизм в группу A, для которого $\psi\rho_i b_i = \varphi_i\pi_i\rho_i b_i = \varphi_i b_i$. Он единствен, так как если гомоморфизм $\psi'\colon \oplus B_i \to A$ также превращает диаграммы (2) в коммутативные, то $\psi - \psi'$ переводит все элементы $\rho_i b_i$ в нуль, т. е. переводит все элементы $b \in \oplus B_i$ в нуль, откуда $\psi - \psi' = 0$. ∎

Теорема 8.2. *Пусть* $\varphi_i\colon A \to B_i$ — *гомоморфизмы,* $i \in I$. *Тогда существует единственный гомоморфизм* ψ, *превращающий все диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \psi\,\downarrow & \searrow \varphi_i & \\ \prod_i B_i & \xrightarrow{\pi_i} & B_i \end{array} \qquad (i \in I) \qquad (3)$$

в коммутативные; здесь π_i — *проекции.*

Для $a \in A$ положим ψa равным тому единственному элементу $b \in \prod B_i$, для которого $\pi_i b = \varphi_i a$ [см. б″)]. Очевидно, ψ является гомоморфизмом, причем $\pi_i\psi = \varphi_i$ для каждого i. Он единствен, так как если ψ' — гомоморфизм с тем же свойством, то $\pi_i(\psi - \psi')a = 0$ для каждого i и, таким образом, элемент $(\psi - \psi')a \in \prod B_i$ имеет только нулевые координаты. Это означает, что $(\psi - \psi')a = 0$ для всякого $a \in A$, т. е. $\psi - \psi' = 0$. ∎

Введем следующие обозначения. Если A_i и B_i $(i \in I)$ — группы и $\alpha_i\colon A_i \to B_i$ — гомоморфизмы, то существуют такие однозначно определенные гомоморфизмы

$$\alpha\colon A = \bigoplus_i A_i \to B = \bigoplus_i B_i \quad \text{и} \quad \alpha^*\colon A^* = \prod A_i \to B^* = \prod B_i,$$

что

$$\pi_i'\alpha\rho_i = \alpha_i = \pi_i'\alpha^*\rho_i \quad \text{и} \quad \pi_j'\alpha\rho_i = 0 = \pi_j'\alpha^*\rho_i \quad (i \neq j),$$

где ρ_i — вложения групп A_i, π_i' — проекции на группы B_i. Именно, α [соответственно α^*] переводит i-ю координату a_i в i-ю координату $\alpha_i a_i$. Эти гомоморфизмы будем обозначать так:

$$\alpha = \bigoplus_i \alpha_i \quad \text{и} \quad \alpha^* = \prod_i \alpha_i.$$

Для группы G введем два отображения: *диагональное отображение* Δ_G: $G \to \prod G$ (число компонент может быть каким угодно), где

$$\Delta_G\colon g \mapsto (\ldots, g, \ldots, g, \ldots) \quad (g \in G),$$

и *кодиагональное отображение* $\nabla_G\colon \bigoplus_i G \to G$, где

$$\nabla_G\colon (\ldots, g_i, \ldots) \mapsto \sum_i g_i \qquad (g_i \in G).$$

В тех случаях, когда это не сможет вызвать недоразумений, индекс G мы будем опускать.

Лемма 8.3. *Если диаграмма в лемме* 2.4 *имеет точные строки и столбцы и коммутативна, то следующие последовательности точны:*

$$0 \to A_1 \xrightarrow{\alpha_2\lambda_1} B_2 \xrightarrow{(\mu_2 \oplus \beta_2)\Delta} B_3 \oplus C_2,$$

$$A_2 \oplus B_1 \xrightarrow{\nabla(\alpha_2 \oplus \mu_1)} B_2 \xrightarrow{\nu_2\beta_2} C_3 \to 0.$$

Так как λ_1 и α_2 — мономорфизмы, то и $\alpha_2\lambda_1$ — мономорфизм. Кроме того, $(\mu_2 \oplus \beta_2)\Delta\alpha_2\lambda_1 = 0$, так как $\beta_2\alpha_2 = 0$ и $\mu_2\alpha_2\lambda_1 = \mu_2\mu_1\alpha_1 = 0$. Если элемент $b_2 \in B_2$ принадлежит $\operatorname{Ker}(\mu_2 \oplus \beta_2)\Delta$, то $\mu_2 b_2 = 0$ и $\beta_2 b_2 = 0$. Можно найти такой элемент $b_1 \in B_1$, что $\mu_1 b_1 = b_2$. Здесь $b_1 \in \operatorname{Im}\alpha_1$, поскольку $\beta_1 b_1 = 0$, как следует из соотношений $\nu_1\beta_1 b_1 = \beta_2\mu_1 b_1 = \beta_2 b_2 = 0$. Поэтому $b_2 \in \operatorname{Im}\mu_1\alpha_1 = \operatorname{Im}\alpha_2\lambda_1$. Точность второй последовательности доказывается аналогично. ∎

Если $a = (\ldots, b_i, \ldots) \in \prod B_i$, то назовем *носителем* элемента a множество

$$s(a) = \{i \in I \mid b_i \neq 0\}.$$

Если $\mathbf{K}$ — идеал булевой алгебры $\mathbf{B}$ всех подмножеств из I, то назовем $\mathbf{K}$-*прямой суммой* групп B_i подмножество группы $\prod B_i$, состоящее из векторов a с носителем $s(a) \in \mathbf{K}$. Так как $s(a_1 - a_2) \subseteq s(a_1) \cup s(a_2)$, то $\mathbf{K}$-прямая сумма является подгруппой группы $\prod B_i$; мы будем обозначать ее через

$$\oplus_{\mathbf{K}} B_i.$$

Если, в частности, $\mathbf{K}$ состоит из всех конечных подмножеств множества I, то получается прямая сумма, если же $\mathbf{K} = \mathbf{B}$, то получается прямое произведение групп B_i.

Среди подгрупп прямого произведения можно выделить важный тип подгрупп, часто встречающийся в алгебре. Подгруппу G прямого произведения $A = \prod B_i$ назовем *подпрямой суммой* групп B_i, если для каждого i отображение $\pi_i \mid G\colon G \to B_i$ является эпиморфизмом. Это означает, что для каждого $i \in I$ и любого $b_i \in B_i$ в G содержится вектор $(\ldots, b_i, \ldots)$, i-я координата которого совпадает с b_i. В этом

случае B_i не обязательно является подгруппой группы G; группа B_i — эпиморфный образ группы G при отображении $\pi_i | G = \eta_i$. Очевидно,

$$\bigcap_i \operatorname{Ker} \eta_i = 0.$$

Обратно, если K_i $(i \in I)$ — такое семейство подгрупп группы G, что $\bigcap K_i = 0$, то G окажется подпрямой суммой факторгрупп G/K_i, если отождествить G с ее образом при мономорфизме

$$g \mapsto (\ldots, g + K_i, \ldots) \in \prod_i (G/K_i).$$

В прямом произведении групп содержится много различных подпрямых сумм. Полного описания таких подпрямых сумм пока не найдено, кроме случая подпрямых сумм двух групп.

Предположим, что группы B, C отображаются с помощью эпиморфизмов β, γ на группу F. Элементы $(b, c) \in B \oplus C$, где $\beta b = \gamma c$, образуют подгруппу A группы $B \oplus C$. Легко видеть, что A является подпрямой суммой групп B и C. Обратно, если A — подпрямая сумма групп B и C, то элементы $b \in B$, где $(b, 0) \in A$, образуют подгруппу $B_0 \subseteq B$, а элементы $c \in C$, где $(0, c) \in A$, образуют подгруппу $C_0 \subseteq C$. Можно непосредственно проверить, что соответствие

$$b + B_0 \mapsto c + C_0,$$

где $(b, c) \in A$, является изоморфизмом между группами B/B_0 и C/C_0. Теперь группа A состоит в точности из тех пар (b, c) $(b \in B,\ c \in C)$, для которых естественные эпиморфизмы $B \to B/B_0$, $C \to C/C_0$ отображают b и c на соответствующие друг другу смежные классы. Это показывает, что все подпрямые суммы двух групп B, C получаются с помощью способа, описанного в начале этого абзаца. Группы B_0, C_0 называются *ядрами* подпрямой суммы. В общем случае подпрямая сумма не определяется ядрами, она зависит также от выбора эпиморфизмов β, γ. Если рассматривать B_0, C_0 как подгруппы группы A, то будут иметь место следующие изоморфизмы:

$$A/(B_0 \oplus C_0) \cong B/B_0 \cong C/C_0, \quad A/B_0 \cong C, \quad A/C_0 \cong B.$$

Одним из наиболее важных приложений понятия прямой суммы служит следующая теорема.

Теорема 8.4. *Периодическая группа A является прямой суммой p-групп A_p, принадлежащих различным простым числам p. Группы A_p однозначно определяются группой A.*

Пусть A_p состоит из всех элементов $a \in A$, порядок которых равен степени простого числа p. Из условия $0 \in A_p$ следует, что A_p не пусто. Если $a, b \in A_p$, т. е. если $p^m a = p^n b = 0$ для некоторых целых чисел $m, n \geqslant 0$, то $p^{\max(m, n)}(a - b) = 0$, $a - b \in A_p$ и, следовательно,

A_p — подгруппа. В группе $A_{p_1} + \ldots + A_{p_k}$ всякий элемент аннулируется произведением степеней простых чисел $p_1, \ldots, p_k$, поэтому

$$A_p \cap (A_{p_1} + \ldots + A_{p_k}) = 0,$$

если $p \neq p_1, \ldots, p_k$. Следовательно, подгруппы A_p порождают в A прямую сумму $\bigoplus_p A_p$. Покажем, что всякий элемент $a \in A$ лежит в этой прямой сумме. Пусть $o(a) = m = p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n}$, где p_i — различные простые числа. Числа $m_i = mp_i^{-r_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ в совокупности взаимно просты, следовательно, существуют такие целые числа $s_1, \ldots, s_n$, что $s_1m_1 + \ldots + s_nm_n = 1$. Отсюда $a = s_1m_1a + \ldots + s_nm_na$, где $m_ia \in A_{p_i}$ [так как $p_i^{r_i}m_ia = ma = 0$] и, таким образом, $a \in A_{p_1} + \ldots + A_{p_n} \subseteq \bigoplus_p A_p$.

Если $A = \bigoplus_p B_p$ — какое-то разложение группы A в прямую сумму p-групп B_p, где p — различные простые числа, то, как следует из определения подгрупп A_p, для любого p имеет место включение $B_p \subseteq A_p$. Так как подгруппы B_p и A_p порождают прямые суммы, каждая из которых равна группе A, то обязательно $B_p = A_p$ для каждого p. ∎

Подгруппы A_p называются *р-компонентами* группы A. Как видно из их определения, они являются вполне характеристическими подгруппами группы A. Если группа A — не периодическая, то можно назвать ее *р-компонентой* p-компоненту ее периодической части $T(A)$ [даже если эта p-компонента не служит прямым слагаемым для группы A]. В силу теоремы 8.4 *теория периодических групп в основном сводится к теории примарных групп.*

Пример 1. Пусть $m = p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n}$ — каноническое разложение натурального числа m. Тогда компоненты группы $Z(m)$ [как подгруппы циклической группы] сами являются циклическими группами, а произведение их порядков равно m. Следовательно,

$$Z(m) = Z(p_1^{r_1}) \oplus \ldots \oplus Z(p_n^{r_n}).$$

Пример 2. Группа Q/Z всех корней из единицы является периодической группой, p-компонента которой, очевидно, состоит из всех корней из единицы степени p^n $(n = 1, 2, \ldots)$. Это означает, что p-компонента группы Q/Z имеет вид $Z(p^\infty)$. Следовательно,

$$Q/Z = \bigoplus_p Z(p^\infty).$$

В заключение докажем следующий результат.

Теорема 8.5. *Элементарная р-группа является прямой суммой циклических групп порядка р.*

Покажем, что элементарную p-группу A можно естественным образом рассматривать как векторное пространство над полем $\mathbf{F}_p$ из p элементов. В самом деле, $pa = 0$ для любого $a \in A$ и, следовательно, для $n, m \in \mathbf{Z}$ равенство $na = ma$ справедливо тогда и только тогда, когда $n \equiv m \bmod p$, т. е. когда n и m являются представителями одного и того же элемента из $\mathbf{F}_p$. Справедливость аксиом векторного пространства проверяется непосредственно. Следовательно, A как векторное пространство над полем $\mathbf{F}_p$ имеет базис $\{a_i\}_{i \in I}$. Но тогда $A = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$. ∎

Пример 3. Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число. Тогда

$$Z(p)^{\mathfrak{m}} = \bigoplus_{2^{\mathfrak{m}}} Z(p).$$

В самом деле, по теореме 8.5 группа $Z(p)^{\mathfrak{m}}$ является прямой суммой групп $Z(p)$, а мощность этой группы, очевидно, равна $p^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{m}}$.

Упражнения

1. Если $m = p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$, то A/mA — прямая сумма групп $A/p_i^{r_i}A$ $(i = 1, \ldots, k)$.

2. (а) Если A — прямая сумма [прямое произведение] групп B_i $(i \in I)$ и C_i — подгруппа в B_i, а C — прямая сумма [прямое произведение] групп C_i, то C — такая подгруппа группы A, что A/C — прямая сумма [прямое произведение] факторгрупп B_i/C_i.

(б) Если точны последовательности $0 \to A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i \xrightarrow{\beta_i} C_i \to 0$ $(i \in I)$, то точны и последовательности

$$0 \to \bigoplus A_i \xrightarrow{\oplus \alpha_i} \bigoplus B_i \xrightarrow{\oplus \beta_i} \bigoplus C_i \to 0,$$

$$0 \to \prod A_i \xrightarrow{\Pi \alpha_i} \prod B_i \xrightarrow{\Pi \beta_i} \prod C_i \to 0.$$

3. Группа A является прямой суммой своих подгрупп A_i $(i \in I)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_i A_i = A \text{ и } \bigcap_i A_i^* = 0, \text{ где } A_i^* = \sum_{j \neq i} A_j.$$

4. (а) Прямая сумма p-групп [периодических групп] сама является p-группой [периодической группой].

(б) Определить, когда прямое произведение периодических групп снова является периодической группой.

5. (а) Если G — подгруппа группы $A = B \oplus C$, то G является подпрямой суммой групп $B \cap (G + C)$ и $(B + G) \cap C$.

(б) Если G — подпрямая сумма групп B и C, то $B + G = B \oplus C = G + C$.

6. Пусть $A = B \oplus C = B \oplus (\oplus A_i)$. Тогда для $C_i = (B + A_i) \cap \cap C$ имеем $B \oplus C_i = B \oplus A_i$ и $C = \bigoplus_i C_i$.

7. (а) Пусть G — подгруппа прямой суммы $B \oplus C$. Тогда существуют такие подгруппы B_1, B_2 группы B и такие подгруппы C_1, C_2 группы C, что $B_2 \subseteq B_1$, $C_2 \subseteq C_1$, $B_1 \oplus C_1$ — минимальная прямая сумма, содержащая G, а $B_2 \oplus C_2$ — максимальная прямая сумма, содержащаяся в G, с компонентами в B и C.

(б) Установить изоморфизмы

$$B_1/B_2 \cong C_1/C_2, \quad (B_1 \oplus C_1)/G \cong G/(B_2 \oplus C_2).$$

8 (Уокер Э. [1]). (а) Пусть $A = B \oplus C = B^* \oplus C^*$. Тогда $B + B^* = B \oplus C_1 = B^* \oplus C_1^*$, где $C_1 = C \cap (B + B^*)$, $C_1^* = C^* \cap \cap (B + B^*)$.

(б) Из $A = B \oplus C = B^* \oplus C^*$ следует $B/(B \cap B^*) \cong C_1^*$, $B^*/(B \cap B^*) \cong C_1$.

9 (Лонстра). Назовем подпрямую сумму G групп A_i $(i \in I)$ *специальной*, если существуют такая группа F и такие эпиморфизмы α_i: $A_i \to F$ $(i \in I)$, что G состоит из всех векторов $(\ldots, a_i, \ldots \ldots, a_j, \ldots) \in \prod A_i$, где $\ldots = \alpha_i a_i = \ldots = \alpha_j a_j = \ldots$.

(а) Показать, что при $|I| \geqslant 3$ не всякая подпрямая сумма является специальной.

(б) Если множество I конечно, то подпрямая сумма G является специальной тогда и только тогда, когда все отображения $g + + (\oplus \operatorname{Ker} \alpha_i) \mapsto \pi_j g + \operatorname{Ker} \alpha_j$ [где π_j: $G \to A_j$ — координатная проекция] являются изоморфизмами между $G/\oplus \operatorname{Ker} \alpha_i$ и $A_j/\operatorname{Ker} \alpha_j$ для каждого $j \in I$.

10. (а) Подпрямая сумма групп $Z(p^m)$ и $Z(p^n)$ [при целых $n \geqslant \geqslant m > 0$] с ядрами $Z(p^{m-k})$ и $Z(p^{n-k})$ изоморфна $Z(p^n) \oplus Z(p^{m-k})$.

(б) Подпрямая сумма групп $Z(p^\infty)$ и $Z(p^\infty)$ с ядрами $Z(p^m)$ и $Z(p^n)$ $(n \geqslant m)$ изоморфна $Z(p^\infty) \oplus Z(p^m)$.

(в) Всякая подпрямая сумма циклической группы и квазициклической группы является прямой суммой.

11. Существуют неизоморфные подпрямые суммы групп $B = = Z(p^2) \oplus Z(p^4)$ и $C = Z(p^3) \oplus Z(p^5)$ с ядрами $B_0 = Z(p) \oplus \oplus Z(p^3)$ и $C_0 = Z(p^2) \oplus Z(p^4)$.

12. Назовем группу A *подпрямо неразложимой*, если в каждом представлении группы A в виде подпрямой суммы групп A_i одна из координатных проекций $A \to A_i$ является изоморфизмом. Показать, что группа A подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда она коциклическая.

13. Пусть B_i $(i \in I)$ — периодические подгруппы группы A. Подгруппа, порожденная подгруппами B_i, является их прямой суммой тогда и только тогда, когда подгруппа, порожденная цоколями $S(B_i)$, является прямой суммой этих цоколей.

14. Пусть B, C — подгруппы группы A и $B \oplus C$ — их внешняя прямая сумма. Доказать существование точной последовательности

$$0 \to B \cap C \to B \oplus C \to B + C \to 0.$$

15. Пусть группа A содержит две последовательности подгрупп $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ и $C_1, \ldots, C_n, \ldots$, где

$$C_1 = A,\ C_n = B_n \oplus C_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\bigcap_n C_n = 0.$$

Доказать, что A — подпрямая сумма групп B_n, содержащая их прямую сумму.

16. Пусть G — подгруппа прямого произведения $A = \prod A_i$, обладающая тем свойством, что вместе с элементом g она содержит и все элементы из A, имеющие тот же носитель. Тогда если все группы A_i имеют порядок $\geqslant 3$, то G есть К-прямая сумма.

17. (Длаб [2]). Доказать, что подгруппа Фраттини прямой суммы равна прямой сумме подгрупп Фраттини слагаемых.

18. Если F — подгруппа Фраттини p-группы A, то A/F является прямой суммой циклических групп порядка p. [На произвольные группы это обобщить нельзя; группа $A = \prod_p Z(p)$ — противоречащий пример.]

§ 9. Прямые слагаемые

Мы назвали подгруппу B группы A прямым слагаемым в случае, когда

$$A = B \oplus C \text{ для некоторой подгруппы } C \subseteq A.$$

Для проекций $\pi\colon A \to B$, $\theta\colon A \to C$ выполняются условия (1) из § 8. Сосредоточим теперь наше внимание на прямом слагаемом B. [Следует отметить, что одно B в общем случае не определяет π однозначно; но оно определяет π, если C тоже известно.] Справедлива следующая полезная лемма.

Лемма 9.1. *Если существует проекция π группы A на ее подгруппу B, то B служит для A прямым слагаемым.*

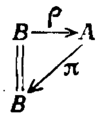
Отображение $\theta = 1_A - \pi$ является эндоморфизмом группы A, удовлетворяющим условиям (1) из § 8. Следовательно, $A = B \oplus \theta A$. Здесь θA есть не что иное, как ядро гомоморфизма π. ∎

Почти тривиальным критерием того, что подгруппа B ($\subseteq A$) — прямое слагаемое группы A, является наличие в смежных классах группы A по подгруппе B таких представителей, что они составляют подгруппу C ($\subseteq A$). Именно, тогда $B + C = A$ и $B \cap C = 0$, т. е. $A = B \oplus C$. Менее тривиальным критерием является

Предложение 9.2. *Для подгруппы B группы A эквивалентны следующие условия* [$\rho\colon B \to A$ — вложение]:

а) *B — прямое слагаемое группы A;*

б) *существует коммутативная диаграмма*



в) *если*

$$\begin{array}{ccccc} & & & \gamma & \\ 0 & \to & U & \to & V \\ & & \beta\downarrow & \swarrow & \downarrow\alpha \\ 0 & \to & B & \xrightarrow{\rho} & A \end{array}$$

— коммутативная диаграмма с точными строками, то существует такой гомоморфизм φ: $V \to B$, что верхний треугольник коммутативен.

Предполагая выполненным условие а), докажем сначала, что выполнено в). Если справедливы предположения пункта в) и π: $A \to B$ — проекция, то для $\varphi = \pi\alpha$ имеем $\varphi\gamma = \pi\alpha\gamma = \pi\rho\beta = \beta$. Предположим теперь, что выполнено в), и возьмем $U = B$, $V = A$, $\gamma = \rho$, $\alpha = 1_A$ и $\beta = 1_B$. Тогда сразу получится б). Наконец, если имеет место б), то π — проекция группы A на B и лемма 9.1 дает условие а). ∎

Заметим что б) означает, что *тождественный автоморфизм подгруппы B можно продолжить до эндоморфизма группы A в B.*

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 9.3. *Если $A = B \oplus C$ и G — вполне характеристическая подгруппа группы A, то*

$$G = (G \cap B) \oplus (G \cap C).$$

Пусть π, θ — проекции, связанные с прямым разложением $A = B \oplus C$. Так как G — вполне характеристическая подгруппа, πG и θG — подгруппы группы G. Далее, из включений $\pi G \subseteq B$ и $\theta G \subseteq C$ следует, что $\pi G \cap \theta G = 0$, а $g = \pi g + \theta g$ ($g \in G$) дает $G = \pi G + \theta G$, так что $G = \pi G \oplus \theta G$. Очевидно, $\pi G \subseteq G \cap B$ и $\theta G \subseteq G \cap C$, откуда обязательно $\pi G = G \cap B$ и $\theta G = G \cap C$. ∎

Лемма 9.4 (Капланский [1]). *Если факторгруппа A/B является прямой суммой,*

$$A/B = \bigoplus_i (A_i/B)$$

и подгруппа B служит прямым слагаемым для каждой группы A_i, скажем $A_i = B \oplus C_i$, то подгруппа B служит прямым слагаемым для группы A,

$$A = B \oplus (\bigoplus_i C_i).$$

Очевидно, подгруппа B и подгруппы C_i вместе порождают группу A. Предположим, что $b + c_1 + \ldots + c_n = 0$ для некоторых элементов $b \in B$ и $c_j \in C_j$ ($j = 1, \ldots, n$). Переходя к факторгруппе по B,

получаем $(c_1 + B) + \ldots + (c_n + B) = B$. Так как $c_j + B \in A_j/B$, то $c_1 + B = \ldots = c_n + B = B$. Следовательно, $c_j \in B$ для каждого j и, таким образом, $c_j \in B \cap C_j = 0$. Но тогда также $b = 0$. Следовательно, подгруппа, порожденная подгруппами B и C_i, является их прямой суммой. ∎

Если B — прямое слагаемое группы A, то дополнение к B в A определено однозначно с точностью до изоморфизма, но оно далеко не единственно как подгруппа. Следующий результат показывает, что из одного дополнения к B легко получить все остальные.

Лемма 9.5. *Пусть $A = B \oplus C$ — прямое разложение с проекциями π, θ. Если разложению $A = B \oplus C_1$ соответствуют проекции π_1, θ_1, то*

$$\pi_1 = \pi + \pi\varphi\theta, \quad \theta_1 = \theta - \pi\varphi\theta \tag{1}$$

для некоторого эндоморфизма φ группы A. Обратно, если эндоморфизмы π_1, θ_1 имеют вид (1), *где φ — некоторый эндоморфизм группы A, то $A = B \oplus \theta_1 A$.*

Если проекции π_1, θ_1 связаны с разложением $A = B \oplus C_1$, то положим $\varphi = \theta - \theta_1$. Очевидно, $B \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$, поэтому $\varphi = \varphi\pi + \varphi\theta = \varphi\theta$. Если $a = b + c = b_1 + c_1$, где $b, b_1 \in B$, $c \in C$, $c_1 \in C_1$, то $\varphi a = c - c_1 = b_1 - b \in B$, откуда $\pi\varphi = \varphi$. Поэтому $\theta_1 = \theta - \varphi = \theta - \pi\varphi\theta$ и $\pi_1 = 1_A - \theta_1 = \pi + \theta - \theta_1 = \pi + \pi\varphi\theta$. Обратно, если π_1, θ_1 имеют вид (1), то $\pi_1 + \theta_1 = 1_A$, $\pi_1^2 = \pi_1$, $\theta_1^2 = \theta_1$ и $\pi_1\theta_1 = \theta_1\pi_1 = 0$, т. е. $A = \pi_1 A \oplus \theta_1 A$. Здесь $\operatorname{Im} \pi_1 \subseteq \operatorname{Im} \pi$ и $\pi_1 B = \pi B = B$, следовательно, $\pi_1 A = B$. ∎

Теорема 9.6 (Гретцер и Шмидт). *Если B—прямое слагаемое группы A, то пересечение $\tilde{C}$ всех дополнений C к подгруппе B в группе A есть максимальная вполне характеристическая подгруппа группы A, не пересекающаяся с B.*

Пусть разложению $A = B \oplus C$ соответствуют проекции π, θ, и пусть φ — эндоморфизм группы A. По лемме 9.5 $C_1 = (\theta - \pi\varphi\theta) A$ есть снова дополнение к B, поэтому для элемента $c \in \tilde{C}$ имеем $(\theta - \pi\varphi\theta) c = c$ и $\theta c = c$ [так как одновременно $c \in C_1$ и $c \in C$]. Отсюда $\pi\varphi c = 0$. Это показывает, что $\varphi c \in C$, а так как C было произвольным дополнением к B, мы получаем, что $\varphi c \in \tilde{C}$, т. е. $\tilde{C}$ — вполне характеристическая подгруппа группы A. Очевидно, $B \cap \tilde{C} = 0$. Если X — какая-то вполне характеристическая подгруппа группы A со свойством $B \cap X = 0$, то в силу леммы 9.3 $X = (X \cap B) \oplus (X \cap C) = X \cap C$. Следовательно, $X \subseteq C$ и $X \subseteq \tilde{C}$. ∎

Следствие 9.7. *Дополнение к прямому слагаемому группы A является единственным тогда и только тогда, когда оно — вполне характеристическая подгруппа группы A.* ∎

Если нужно показать, что подгруппа B группы A служит для A прямым слагаемым, то в большинстве случаев невозможно непосред-

ственно найти проекцию $A \to B$. Тогда пробуют найти дополнение C к подгруппе B среди подгрупп G группы A, удовлетворяющих условию $G \cap B = 0$.

Назовем *B-высокой подгруппой* (Ирвин и Уокер [1]) подгруппу H группы A, для которой

$$H \cap B = 0 \text{ и } H' \cap B \neq 0 \text{ при } H \subset H' \subseteq A.$$

Это означает, что H — максимальная подгруппа, не пересекающаяся с B. Тогда, в частности, $H + B = H \oplus B$. Существование B-высоких подгрупп для любой подгруппы B гарантируется леммой Цорна. Более того, подгруппу H можно выбрать так, что она будет содержать заданную подгруппу G группы A, обладающую свойством $G \cap B = 0$. В самом деле, множество всех подгрупп группы A, содержащих G и не пересекающихся с B, не пусто и индуктивно, следовательно, оно содержит максимальный член H.

Дополнение C подгруппы B в A, очевидно, является B-высокой подгруппой; более того, в силу теоремы 9.6 оно должно содержать всякую вполне характеристическую подгруппу X группы A со свойством $X \cap B = 0$. В некоторых случаях построение дополнения к подгруппе B состоит в выборе B-высокой подгруппы, содержащей такую подгруппу X [см., например, доказательство предложения 27.1].

Докажем теперь две леммы технического характера.

Лемма 9.8. *Если B — подгруппа группы A и C является B-высокой подгруппой в A, то из включений $a \in A$, $pa \in C$ [p — простое число] следует, что $a \in B \oplus C \subseteq A$.*

Если $a \in C$, то доказывать нечего. Если $a \notin C$, то подгруппа $\langle C, a\rangle$ содержит, согласно выбору подгруппы C, элемент $b \in B$, $b \neq 0$, т. е. $b = c + ka$ для некоторого $c \in C$ и целого числа k. Здесь $(k, p) = 1$, так как $pa \in C$ и $B \cap C = 0$. Следовательно, $rk + sp = 1$ для некоторых целых чисел r, s, и, таким образом, $a = r(ka) + s(pa) = r(b - c) + s(pa) \in B \oplus C$. ∎

Лемма 9.9 (Гретцер). *Пусть группы A, B, C — такие же, как в лемме 9.8. Тогда $A = B \oplus C$ в том и только в том случае, когда из равенства $pa = b + c$ ($a \in A$, $b \in B$, $c \in C$) непременно следует $pb' = b$ для некоторого $b' \in B$.*

Если $A = B \oplus C$ и $a = b' + c'$ ($b' \in B$, $c' \in C$), то $pa = pb' + pc' = b + c$ дает $pb' = b$. Обратно, если из равенства $pa = b + c$ всегда следует $pb' = b$ для некоторого $b' \in B$, то $a - b'$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы и, следовательно, $a - b' \in B \oplus C$, $a \in B \oplus C$. Это означает, что факторгруппа $A/(B \oplus C)$ не содержит элементов простого порядка, т. е. является группой без кручения. Но если x — произвольный элемент группы A, не лежащий в $B \oplus C$, то пересечение $\langle C, x\rangle \cap B$ содержит ненулевой элемент $c'' + lx = b''$ для некоторого $c'' \in C$ и целого числа l. Тогда $l \neq 0$, так как $B \cap C = 0$,

поэтому из включения $lx = b'' - c'' \in B \oplus C$ следует, что $A/(B \oplus C)$ — периодическая группа. Таким образом, $A = B \oplus C$. ∎

Подгруппа G группы A называется *абсолютным прямым слагаемым* группы A, если $A = G \oplus H$ для любой G-высокой подгруппы H группы A. Абсолютные прямые слагаемые — явление редкое; они описываются в упражнении 8.

В заключение приведем следующий результат.

Предложение 9.10 (Капланский [3], Уокер К. [1]). *Пусть A — прямая сумма групп A_i $(i \in I)$, где каждая группа A_i имеет мощность не больше $\mathfrak{m}$ для фиксированного бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$. Тогда всякое прямое слагаемое группы A также является прямой суммой групп мощности $\leqslant \mathfrak{m}$.*

Пусть $A = B \oplus C$. Рассмотрим прямое слагаемое A_j. Если $\{a_k\}_{k \in K}$ — система образующих группы A_j и $a_k = b_k + c_k$ $(b_k \in B,\ c_k \in C)$, то каждый элемент b_k и каждый элемент c_k имеют лишь конечное число ненулевых координат в прямой сумме $A = \bigoplus_i A_i$. Поэтому если собрать все A_i, содержащие хотя бы одну ненулевую координату некоторого элемента b_k или c_k $(k \in K)$, и взять их сумму в A, то, очевидно, получится прямое слагаемое A'_j группы A мощности $\leqslant \mathfrak{m}$. Выбирая в A'_j некоторую систему образующих и повторяя прежний процесс для A'_j вместо A_j, получим прямое слагаемое A''_j группы A снова мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ и т. д. Объединение возрастающей последовательности $A_j \subseteq \subseteq A'_j \subseteq A''_j \subseteq \ldots$ является таким прямым слагаемым A^*_j группы A, что

$$|A^*_j| \leqslant \mathfrak{m} \quad \text{и} \quad A^*_j = (B \cap A^*_j) \oplus (C \cap A^*_j).$$

Теперь определим следующим образом вполне упорядоченную возрастающую последовательность подгрупп S_σ группы A. Положим $S_0 = 0$. Если S_σ уже определена для некоторого порядкового числа σ и $S_\sigma \neq A$, то выберем какую-нибудь группу A_j, не лежащую в S_σ, и положим $S_{\sigma+1} = S_\sigma + A^*_j$. Если σ — предельное порядковое число, то положим $S_\sigma = \bigcup_{\rho<\sigma} S_\rho$. Очевидно, что для некоторого порядкового числа τ, мощность которого не превосходит $|A|$, будет иметь место равенство $S_\tau = A$. Ясно также, что $S_{\sigma+1}/S_\sigma$ имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$, каждая группа S_σ является прямой суммой некоторых из групп A_i и $S_\sigma = (B \cap S_\sigma) \oplus (C \cap S_\sigma)$ для каждого $\sigma \leqslant \tau$. Далее, $B \cap S_\sigma$ — прямое слагаемое группы S_σ, которая сама является прямым слагаемым группы A; следовательно, $B \cap S_\sigma$ — прямое слагаемое группы $B \cap S_{\sigma+1}$; пусть $B \cap S_{\sigma+1} = (B \cap S_\sigma) \oplus B_\sigma$. Из наличия изоморфизма

$$B_\sigma \cong (B \cap S_{\sigma+1})/(B \cap S_{\sigma+1} \cap S_\sigma) \cong [S_\sigma + (B \cap S_{\sigma+1})]/S_\sigma \subseteq S_{\sigma+1}/S_\sigma$$

следует, что $|B_\sigma| \leqslant \mathfrak{m}$. Подгруппа, порожденная подгруппами B_σ, является их прямой суммой, так как если $b_{\sigma_1} + \ldots + b_{\sigma_r} = 0$, причем

$\sigma_1 < \ldots < \sigma_r$ $(b_{\sigma_s} \in B_{\sigma_s})$, то из включений $b_{\sigma_1} + \ldots + b_{\sigma_{r-1}} \in B \cap S_{\sigma_r}$, $b_{\sigma_r} \in B_{\sigma_r}$ следует, что $b_{\sigma_r} = 0$. Так как B является суммой подгрупп B_σ, то утверждение доказано. ∎

Заметим, что если A — прямая сумма конечных групп, то каждое прямое слагаемое группы A обладает тем же свойством. Это — простое следствие теорем 15.2 и 18.1.

Упражнения

1. Если B, C — такие подгруппы группы A, что $B \cap C = 0$ и $(B + C)/C$ — прямое слагаемое группы A/C, то $A = B \oplus C'$ для некоторой подгруппы $C' \supseteq C$.

2. Распространить лемму 9.3 на бесконечные прямые суммы.

3. Пусть B — прямое слагаемое группы A, и пусть π_i пробегает все проекции группы A на B. Показать, что эти проекции π_i образуют полугруппу относительно умножения, где $\pi_i \pi_j = \pi_j$. Кроме того, проекции $1 - \pi_i$ образуют полугруппу, где $(1 - \pi_i)(1 - \pi_j) = 1 - \pi_i$.

4. Назовем подгруппу G группы A *инвариантной относительно проекций*, если всякая проекция π группы A на прямое слагаемое отображает подгруппу G в себя.

(а) Показать, что подгруппа G инвариантна относительно проекций тогда и только тогда, когда $\pi G = G \cap \pi A$ для любой проекции π.

(б) Пересечение подгрупп, инвариантных относительно проекций, и подгруппа, порожденная такими подгруппами, являются подгруппами, инвариантными относительно проекций.

(в) Лемма 9.3 справедлива для подгрупп, инвариантных относительно проекций.

(г) Прямые слагаемые, инвариантные относительно проекций, являются вполне характеристическими подгруппами.

5 (Куликов [4]). Прямое разложение $A = \oplus A_i$ имеет общее продолжение с любым прямым разложением группы A тогда и только тогда, когда каждая подгруппа A_i инвариантна относительно проекций.

6 (Фукс [5]). Пусть $B \subseteq A$, и пусть C есть B-высокая подгруппа. Тогда $A^* = B \oplus C \subseteq A$ удовлетворяет условиям

(а) A/A^* — периодическая группа;

(б)* $(A/A^*)[p] \cong [(pA + C) \cap B]/pB$ для любого простого числа p.

7 Если B — подгруппа группы A и $B \cong J_p$, то для любой B-высокой подгруппы C группы A факторгруппа $A/(B \oplus C)$ изоморфна подгруппе группы $Z(p^\infty)$.

8*. (Фукс [5]). Прямое слагаемое B группы A является абсолютным прямым слагаемым тогда и только тогда, когда или B — делимая группа [см. § 20], или A/B — периодическая группа, p-компонента которой обращается в нуль при умножении на p^k, если $B \setminus pB$ содержит элемент порядка p^k.

9. Если $A = B \oplus C = B_1 \oplus C$ и B — абсолютное прямое слагаемое группы A, то B_1 также является абсолютным прямым слагаемым.

10*. Найти все абсолютные прямые слагаемые ограниченной группы.

11 (Ирвин и Уокер [1]). Пусть $A = \bigoplus_i A_i$ и $B_i \subseteq A_i$. Если C_i есть B_i-высокая подгруппа группы A_i (для каждого i), то $\bigoplus_i C_i$ есть $\bigoplus_i B_i$-высокая подгруппа группы A.

12 (Энокс [1]). Пусть A есть p-группа, и пусть $A = B \oplus C = B_1 \oplus C_1$ — два таких ее прямых разложения, что $B[p] = B_1[p]$. Тогда $A = B \oplus C_1 = B_1 \oplus C$. [*Указание*: для доказательства того, что при $a \in C$ справедливо $a \in B \oplus C_1$, использовать индукцию по порядку элемента a.]

§ 10. Коуниверсальный и универсальный квадраты

Используя прямые суммы, можно доказать две теоремы существования для некоторых типов диаграмм. Полезно иметь их в своем распоряжении.

Теорема 10.1. *Если даны гомоморфизмы* $\alpha\colon A \to C$ *и* $\beta\colon B \to C$, *то существуют такая группа* G, *определенная однозначно с точностью до изоморфизма, и такие гомоморфизмы* $\gamma\colon G \to A$, $\delta\colon G \to B$, *что* 1) *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\gamma} & A \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array} \qquad (1)$$

коммутативна и 2) *если*

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{\gamma'} & A \\ {\scriptstyle\delta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array} \qquad (2)$$

— коммутативная диаграмма, то существует однозначно определенный гомоморфизм $\varphi\colon G' \to G$ *со свойствами* $\gamma\varphi = \gamma'$ *и* $\delta\varphi = \delta'$.

Коммутативная диаграмма (1), удовлетворяющая условию 2), называется *коуниверсальным квадратом*.

Если даны гомоморфизмы α, β, то возьмем в качестве G подгруппу прямой суммы $A \oplus B$, состоящую из всех пар (a, b), где $\alpha a = \beta b$, и пусть

$$\gamma\colon (a, b) \mapsto a, \quad \delta\colon (a, b) \mapsto b$$

— соответствующие проекции. Тогда диаграмма (1) будет, очевидно, коммутативной. Предположим, что (2) — коммутативная диаграмма, и определим $\varphi\colon G' \to G$ таким образом, что $\varphi g' = (\gamma' g', \delta' g')$ для $g' \in G'$; здесь $(\gamma' g', \delta' g') \in G$, так как $\alpha\gamma' = \beta\delta'$. Очевидно, $\gamma\varphi g' = \gamma' g'$ и $\delta\varphi g' = \delta' g'$ для любого $g' \in G'$, т. е. φ обладает требуемыми

свойствами. Легко видеть, что

$$\operatorname{Ker}\gamma = (0, \operatorname{Ker}\beta) \text{ и } \operatorname{Ker}\delta = (\operatorname{Ker}\alpha, 0). \tag{3}$$

Поэтому если для φ': $G' \to G$ также выполнены равенства $\gamma\varphi' = \gamma'$ и $\delta\varphi' = \delta'$, то $\gamma(\varphi - \varphi') = 0 = \delta(\varphi - \varphi')$ и, следовательно, $\operatorname{Im}(\varphi - \varphi') \subseteq \operatorname{Ker}\gamma \cap \operatorname{Ker}\delta = 0$. Это показывает, что $\varphi - \varphi' = 0$, т. е. гомоморфизм φ единствен.

Докажем единственность группы G. Рассмотрим группу $\overline{G}$, обладающую теми же свойствами, что и G; соответствующие отображения в диаграмме (1) обозначим через $\overline{\gamma}$: $\overline{G} \to A$ и $\overline{\delta}$: $\overline{G} \to B$. Тогда мы будем иметь однозначно определенные гомоморфизмы φ: $\overline{G} \to G$ и $\overline{\varphi}$: $G \to \overline{G}$ со свойствами $\gamma\varphi = \overline{\gamma}$, $\delta\varphi = \overline{\delta}$ и $\overline{\gamma}\overline{\varphi} = \gamma$, $\overline{\delta}\overline{\varphi} = \delta$. Отсюда $\gamma\varphi\overline{\varphi} = \gamma$ и $\delta\varphi\overline{\varphi} = \delta$, т. е. $\varphi\overline{\varphi}$: $G \to G$ сохраняет неизменными и A-координаты, и B-координаты, откуда $\varphi\overline{\varphi} = 1_G$. По предложению 9.2 $\overline{\varphi}G = \overline{\varphi}\varphi(\overline{\varphi}G)$ — прямое слагаемое группы $\overline{G}$, т. е. $\overline{G} = \overline{\varphi}G \oplus X$. Так как в свойстве 2) мы имели для всякой группы G' единственное отображение $G' \to \overline{G}$, то X должно быть равно нулю. Следовательно, $\overline{\varphi}$ — изоморфизм. ∎

Следующий результат двойствен предыдущей теореме.

Теорема 10.2. *Предположим, что заданы гомоморфизмы* α: $C \to A$ *и* β: $C \to B$. *Тогда существуют такая единственная с точностью до изоморфизма группа* G *и такие два гомоморфизма* γ: $A \to G$, δ: $B \to G$, *что* 1) *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & A \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ B & \xrightarrow{\delta} & G \end{array} \tag{4}$$

коммутативна и 2) *для всякой коммутативной диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & A \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma'} \\ B & \xrightarrow{\delta'} & G' \end{array} \tag{5}$$

существует единственный гомоморфизм φ: $G \to G'$ *со свойствами* $\varphi\gamma = \gamma'$ *и* $\varphi\delta = \delta'$.

Коммутативная диаграмма (4), обладающая свойством 2), называется *универсальным квадратом.*

Исходя из гомоморфизмов α, β, определим G как факторгруппу группы $A \oplus B$ по подгруппе H элементов вида $(\alpha c, -\beta c)$, где $c \in C$, и пусть

$$\gamma: a \mapsto (a, 0) + H, \quad \delta: b \mapsto (0, b) + H$$

— отображения, индуцированные вложениями. Тогда $\gamma\alpha c = \delta\beta c$ для каждого $c \in C$ и диаграмма (4) коммутативна. Если (5) — коммутативная диаграмма, то определим φ: $G \to G'$ таким образом, что φ: $(a, b) + H \mapsto \gamma' a + \delta' b$. Легко видеть, что это отображение не зависит от представителя (a, b) смежного класса и что $\varphi\gamma = \gamma'$, $\varphi\delta = \delta'$. Единственность гомоморфизма φ вытекает из того простого факта, что $\operatorname{Im}\gamma$ и $\operatorname{Im}\delta$ порождают G, и поэтому если $\varphi'\gamma = \gamma'$, $\varphi'\delta = \delta'$ для некоторого φ': $G \to G'$, то из равенства $(\varphi - \varphi')\gamma = 0 = (\varphi - \varphi')\delta$ следует, что $\varphi - \varphi'$ отображает все G в 0. Единственность группы G доказывается с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в конце доказательства предыдущей теоремы. ∎

В дальнейшем будут полезны следующие замечания, касающиеся коуниверсальных и универсальных квадратов.

а) *Если в коуниверсальном квадрате* (1) *гомоморфизм* α *является мономорфизмом, то и* δ — *мономорфизм. Если* α — *эпиморфизм, то* δ — *тоже эпиморфизм.*

Так как группа G определена однозначно с точностью до изоморфизма и, кроме того, как показано в последней части доказательства теоремы 10.1, однозначно с точностью до изоморфизма определены также $\operatorname{Im}\delta$ и $\operatorname{Ker}\delta$, то утверждение достаточно доказать для группы G, построенной в доказательстве теоремы 10.1. Тот факт, что из равенства $\operatorname{Ker}\alpha = 0$ следует $\operatorname{Ker}\delta = 0$, сразу вытекает из соотношений (3). Если α — эпиморфизм, то для всякого $b \in B$ существует такой элемент $a \in A$, что $\alpha a = \beta b$, и, таким образом, δ — также эпиморфизм.

б) *Если в универсальном квадрате* (4) *гомоморфизм* α *является мономорфизмом, то и* δ — *мономорфизм, а если* α — *эпиморфизм, то* δ — *также эпиморфизм.*

Опять достаточно доказать это для G и δ, определенных в доказательстве теоремы 10.2. Ядро $\operatorname{Ker}\delta$ состоит из всех $b \in B$, для которых существует такой элемент $c \in C$, что $\alpha c = 0$ и $-\beta c = b$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\delta = 0$, если $\operatorname{Ker}\alpha = 0$. Если α — эпиморфизм, то для каждого $a \in A$ существует такой элемент $c \in C$, что $\alpha c = a$, и, таким образом, δ отображает $b + \beta c$ на $(a, b) + H = (0, b + \beta c) + H$. Следовательно, δ — эпиморфизм.

Упражнения

1. Построить коуниверсальные квадраты для $B = 0$ [для $A = B$] в диаграмме (1).
2. Построить универсальные квадраты для $B = 0$ [для $A = B$] в диаграмме (4).
3. Если $C = 0$ в коуниверсальном квадрате (1), то $G \cong A \oplus B$.
4. Если $C = 0$ в универсальном квадрате (4), то $G \cong A \oplus B$.
5*. Пусть задано множество гомоморфизмов α_i: $A_i \to C$ в одну и ту же группу C. Доказать утверждение, обобщающее теорему 10.1.
6. Выполнить аналог упражнения 5 для теоремы 10.2.

7. Если в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \to & A_2 & \to & A_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \to & B_2 & \to & B_3 \end{array}$$

каждый квадрат является коуниверсальным и $A_3 \to B_3$ — мономорфизм, то внешний прямоугольник — также коуниверсальный квадрат.

8. Сформулировать и доказать утверждение, двойственное утверждению упражнения 7, для универсальных квадратов.

§ 11. Прямые пределы

Понятие прямого предела возникло в топологии, но оно оказалось очень полезным и в алгебре.

Пусть $\{A_i\}$ — система групп, занумерованных с помощью индексов, составляющих частично упорядоченное множество I, которое является *направленным* в том смысле, что для любых $i, j \in I$ существует такое $k \in I$, что $i \leqslant k$ и $j \leqslant k$. Предположим, что для каждой пары индексов $i, j \in I$, где $i \leqslant j$, задан гомоморфизм

$$\pi_i^j\colon\ A_i \to A_j\ (i \leqslant j),$$

причем выполнены условия:

1) π_i^i является тождественным отображением группы A_i при любом $i \in I$;

2) если $i \leqslant j \leqslant k$, то $\pi_j^k \pi_i^j = \pi_i^k$.

В этом случае система

$$\mathbf{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\} \tag{1}$$

называется *прямым спектром*.

Составим прямую сумму $\bigoplus\limits_i A_i = A$ групп из прямого спектра $\mathbf{A}$ и возьмем ее подгруппу B, порожденную всеми элементами из A вида

$$a_i - \pi_i^j a_i \quad (i \leqslant j).$$

Прямым (или *инъективным*) пределом или просто *пределом прямого спектра* $\mathbf{A}$ называется факторгруппа A/B:

$$\varinjlim{}_I A_i = A/B = A_*.$$

Отметим некоторые элементарные свойства прямых пределов.

а) *Подгруппа B состоит из всех элементов*

$$a = a_{i_1} + \ldots + a_{i_n} \quad (a_i \in A_i),$$

для которых в множестве I существует такое $i \geqslant i_1, \ldots, i_n$, что

$$\pi_{i_1}^i a_{i_1} + \ldots + \pi_{i_n}^i a_{i_n} = 0.$$

Так как образующие $a = a_i - \pi_i^j a_i$ группы B обладают этим свойством (а именно $\pi_i^j a_i - \pi_j^j(\pi_i^j a_i) = 0$), то им обладают и все элементы из B. Обратное сразу следует из равенства

$$a_{i_1} + \ldots + a_{i_n} - \pi_{i_1}^i a_{i_1} - \ldots - \pi_{i_n}^i a_{i_n} =$$
$$= (a_{i_1} - \pi_{i_1}^i a_{i_1}) + \ldots + (a_{i_n} - \pi_{i_n}^i a_{i_n}) \in B.$$

б) *Существуют такие гомоморфизмы*

$$\pi_i\colon A_i \to A_* \quad (i \in I),$$

что коммутативны все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\pi_i^j} & A_j \\ {\scriptstyle \pi_i}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle \pi_j} & \\ A_* & & \end{array} \qquad (i \leqslant j) \tag{2}$$

В самом деле, этим условиям удовлетворяют гомоморфизмы $\pi_i : a_i \mapsto a_i + B$. Через π_i мы всегда будем обозначать именно эти гомоморфизмы. Мы будем называть их *каноническими* [это название оправдано вследствие теоремы 11.1].

в) *Каждый элемент $a_* \in A_*$ представим в виде $a_i + B$, где $a_i \in A_i$ для некоторого $i \in I$.*

Пусть $a = a_{i_1} + \ldots + a_{i_n}$, где $a_{i_m} \in A_{i_m}$. Выберем в I некоторый элемент $i \geqslant i_1, \ldots, i_n$. Тогда $a - \sum \pi_{i_m}^i a_{i_m} \in B$ и, следовательно, $a_i + B = a + B$, где $a_i = \sum \pi_{i_m}^i a_{i_m}$.

г) *Группы* $\operatorname{Im} \pi_i$ *($i \in I$) в совокупности покрывают A_*.*

Это следует из п. в) и определения гомоморфизмов π_i.

д) *Если $\pi_i a_i = 0$ для некоторого $a_i \in A_i$, то в I существует такое $j \geqslant i$, что $\pi_i^j a_i = 0$.*

По определению π_i имеем $a_i \in B$. Утверждение вытекает теперь из а). Отсюда получаем:

е) *Если каждый гомоморфизм π_i^j является мономорфизмом, то и все π_i — мономорфизмы.*

ж) *Если каждый гомоморфизм π_i^j есть эпиморфизм, то и каждый гомоморфизм π_i — эпиморфизм.*

Возьмем элемент $a_* \in A_*$ и запишем его в виде $\pi_j a_j$ при некотором $j \in I$ [см. г)]. Для данного π_i существует такое $k \in I$, что $i, j \leqslant k$. Очевидно, $\pi_j a_j = \pi_k \pi_j^k a_j$. По предположению для некоторого $a_i \in A_i$ выполнено $\pi_i^k a_i = \pi_j^k a_j$. Поэтому $a_* = \pi_k \pi_j^k a_j = \pi_k \pi_i^k a_i = \pi_i a_i$, откуда видно, что каждый элемент $a_* \in A_*$ содержится в $\operatorname{Im} \pi_i$.

3) *Если K — кофинальная подсистема в I, то*

$$\varinjlim_K A_j \cong \varinjlim_I A_i.$$

В самом деле, если первой из этих групп является A'/B', то, как легко видеть, $a_j + B' \mapsto a_j + B$ ($j \in K$) есть изоморфное отображение группы A'/B' на A/B.

В следующей теореме выявляется свойство универсальности прямых пределов.

Теорема 11.1. *Предел A_* прямого спектра* (1) *обладает следующим свойством: если G — группа и даны гомоморфизмы $\sigma_i : A_i \to G$, для которых диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\pi_i^j} & A_j \\ & \sigma_i \searrow & \downarrow \sigma_j \\ & & G \end{array} \qquad (i \leqslant j) \qquad (3)$$

коммутативны, то существует один и только один такой гомоморфизм σ: $A_* \to G$, что все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A_i & & \\ \pi_i \downarrow & \searrow \sigma_i & \\ A_* & \xrightarrow{\sigma} & G \end{array} \qquad (i \in I) \qquad (4)$$

коммутативны. Группа A_* вместе с гомоморфизмами π_i определяется этим свойством однозначно с точностью до изоморфизма.

Если элемент $a_* \in A_*$ представлен в виде $a_i + B$ ($a_i \in A_i$), то положим $\sigma a_* = \sigma_i a_i$. Из коммутативности диаграммы (3) следует, что образ элемента a_* не зависит от выбора индекса $i \in I$, поэтому σ является отображением $A_* \to G$. Очевидно, σ сохраняет операцию сложения, следовательно, это гомоморфизм, обладающий свойством $\sigma\pi_i a_i = \sigma a_* = \sigma_i a_i$, т. е. диаграмма (4) коммутативна. Если σ': $A_* \to G$ тоже делает все диаграммы вида (4) коммутативными, то $(\sigma - \sigma')\,\pi_i = 0$ для каждого $i \in I$, т. е. $\sigma - \sigma'$ переводит любую подгруппу $\operatorname{Im} \pi_i$ в 0. По п. г) $\sigma - \sigma' = 0$, и единственность гомоморфизма σ доказана.

Чтобы доказать последнее утверждение теоремы, предположим, что группа A_0 и гомоморфизмы τ_i: $A_i \to A_0$ обладают свойством, установленным для A_* и π_i. По доказанному мы имеем такой однозначно определенный гомоморфизм σ: $A_* \to A_0$, что $\tau_i = \sigma\pi_i$, а по предположению, сделанному относительно A_0, имеем такой гомоморфизм σ_0: $A_0 \to A_*$, что $\pi_i = \sigma_0\tau_i$. Отсюда получаем, что $\pi_i = \sigma_0\,\sigma\pi_i$ (и $\tau_i = \sigma\sigma_0\tau_i$). Следовательно, $\sigma_0\sigma$ является тождественным отображением на всех $\operatorname{Im} \pi_i$, т. е. и на A_*. Поэтому σA_* служит для группы A_0

прямым слагаемым. Из единственности гомоморфизма $A_0 \to G$ для любой группы G вытекает, что $\sigma A_* = A_0$. Таким образом, σ — изоморфизм между группами A_* и A_0. ■

Пример 1. Пусть A — произвольная группа и A_i $(i \in I)$ — система всех ее конечно порожденных подгрупп, причем множество I частично упорядочено таким образом, что $i \leqslant j$ тогда и только тогда, когда A_i — подгруппа группы A_j. Пусть π_i^j — естественное вложение $A_i \to A_j$ $(i \leqslant j)$. Тогда $\mathbf{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ является прямым спектром, а

$$\varinjlim_I A_i = A_* \cong A,$$

причем изоморфизм $\rho\colon A \to A_*$ канонический: он действует так, что $a \mapsto a + B$ [где $a \in A$ рассматривается как элемент из некоторой подгруппы A_i]. Действительно, если σ_i — естественное вложение $A_i \to A$ и $\sigma\colon A_* \to A$ — однозначно определенный гомоморфизм с тем свойством, что $\sigma\pi_i = \sigma_i$ [см. теорему 11.1], то из коммутативности малых треугольников в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & A_i & & \\ & \swarrow{\scriptstyle \sigma_i} & \downarrow{\scriptstyle \pi_i} & {\scriptstyle \sigma_i}\searrow & \\ A & \xleftarrow{\ \rho\ } & A_* & \xrightarrow{\ \sigma\ } & A \end{array}$$

мы заключаем, что большой треугольник коммутативен. Так как $\operatorname{Im} \sigma_i$ покрывают группу A, а $\operatorname{Im} \pi_i$ покрывают A_*, отсюда следует, что ρ и σ взаимно обратны.

Пример 2. Пусть A — прямая сумма: $A = \bigoplus\limits_i C_i$, и пусть множество индексов I как-то линейно упорядочено. Положим $A_i = \bigoplus\limits_{k<i} C_k$, и пусть $\pi_i^j\colon A_i \to A^j$ — вложения (для $i \leqslant j$). Тогда

$$\varinjlim_I A_i \cong A.$$

Доказательство этого факта проходит так же, как в примере 1.

Пример 3. Пусть $C_n = \langle c_n \rangle$ — циклическая группа порядка p^n $(n = 1, 2, \ldots)$, и пусть $\pi_n^{n+1}\colon C_n \to C_{n+1}$ таково, что $\pi_n^{n+1} c_n = p c_{n+1}$. Тогда для любых m, n, где $m \leqslant n$, можно единственным образом определить отображения $\pi_m^n\colon C_m \to C_n$ так, что будут выполняться условия 1) и 2). Теперь

$$\varinjlim_n C_n \cong Z(p^\infty).$$

Доказательство этого предоставляется читателю.

Рассмотрим гомоморфизмы между прямыми пределами, которые индуцируются гомоморфизмами между соответствующими прямыми спектрами. Если

$$\mathbf{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\} \text{ и } \mathbf{B} = \{B_i\ (i \in I);\ \rho_i^j\}$$

— два прямых спектра с одной и той же системой индексов I, то *гомоморфизмом*

$$\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$$

называется такая система гомоморфизмов $\varphi = \{\varphi_i\colon A_i \to B_i\ (i \in I)\}$, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\pi_i^j} & A_j \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_i} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_j} \\ B_i & \xrightarrow{\rho_i^j} & B_j \end{array} \qquad (i \leqslant j)$$

коммутативны.

Теорема 11.2. *Если* A *и* B — *прямые спектры и* $\varphi\colon A \to B$ — *гомоморфизм, то существует однозначно определенный гомоморфизм*

$$\varphi_*\colon A_* = \varinjlim A_i \to B_* = \varinjlim B_i,$$

для которого диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\pi_i} & A_* \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_i} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_*} \\ B_i & \xrightarrow{\rho_i} & B_* \end{array} \qquad (i \in I) \tag{5}$$

коммутативны [π_i, ρ_i — *канонические гомоморфизмы*]. *Гомоморфизм* φ_* *является эпиморфизмом* [*мономорфизмом*], *если все* φ_i — *эпиморфизмы* [*мономорфизмы*].

Так как отображения $\rho_i\varphi_i\colon A_i \to B_*$ удовлетворяют условию $\rho_j\varphi_j\pi_i^j = \rho_j\rho_i^j\varphi_i = \rho_i\varphi_i$ для каждой пары индексов $i \leqslant j$, то из теоремы 11.1 следует, что существует такой однозначно определенный гомоморфизм $\varphi_*\colon A_* \to B_*$, что $\rho_i\varphi_i = \varphi_*\pi_i$. Это доказывает первое утверждение. Если все φ_i — эпиморфизмы, то подгруппы $\operatorname{Im}\rho_i = \operatorname{Im}\rho_i\varphi_i$ в совокупности покрывают B_*, и поэтому φ_* — эпиморфизм. Если все φ_i — мономорфизмы, то пусть $a \in \operatorname{Ker}\varphi_*$. Для некоторого i справедливо равенство $a = \pi_i a_i$, где $a_i \in A_i$. Следовательно, $\rho_i\varphi_i a_i = \varphi_*\pi_i a_i = \varphi_* a = 0$, откуда, согласно п. д), $\rho_i^j\varphi_i a_i = 0$ для некоторого $j \geqslant i$. Так как $\rho_i^j\varphi_i = \varphi_j\pi_i^j$ и φ_j — моиоморфизм, то $\pi_i^j a_i = 0$, т. е. $\pi_i a_i = 0$ и $a = 0$. Это означает, что φ_* — мономорфизм. ■

Интересна следующая интерпретация теоремы 11.2. Если дано направленное множество I, то рассмотрим категорию $\mathscr{D}_I$ всех прямых спектров абелевых групп, занумерованных с помощью индексов из I, с определенными выше гомоморфизмами. Тогда функция L_*, ставящая в соответствие прямому спектру A его предел A_*, а гомоморфизму $\varphi\colon A \to B$ гомоморфизм $\varphi_*\colon A_* \to B_*$, будет в силу теоремы 11.2 функтором из категории $\mathscr{D}_I$ в категорию $\mathscr{A}$. Учитывая это, мы можем рассматривать φ_* как естественное отображение прямых пределов.

В заключение рассмотрим три прямых спектра: спектры A, B, определенные выше, и спектр $C = \{C_i\ (i \in I);\ \sigma_i^j\}$, каждому из которых соответствует одно и то же множество индексов I. Если $\varphi\colon A \to B$

и ψ: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ — такие гомоморфизмы между этими прямыми спектрами, что для каждого i последовательность

$$A_i \xrightarrow{\varphi_i} B_i \xrightarrow{\psi_i} C_i$$

точна, то мы будем говорить, что *точна* последовательность

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{B} \xrightarrow{\psi} \boldsymbol{C}. \qquad (6)$$

Имеет место

Теорема 11.3. *Если* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ — *такие прямые спектры групп, что* (6) — *точная последовательность, то точна также последовательность*

$$A_* = \varinjlim A_i \xrightarrow{\varphi_*} B_* = \varinjlim B_i \xrightarrow{\psi_*} C_* = \varinjlim C_i,$$

где φ_*, ψ_* — *индуцированные отображения* [*см. предыдущую теорему*].

По теореме 11.2 диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xrightarrow{\varphi_i} & B_i & \xrightarrow{\psi_i} & C_i \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_i} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_i} \\ A_* & \xrightarrow{\varphi_*} & B_* & \xrightarrow{\psi_*} & C_* \end{array} \qquad (i \in I)$$

коммутативна. Если $a \in A_*$, то $\pi_i a_i = a$ для некоторого $i \in I$ и, таким образом, $\psi_*\varphi_* a = \psi_*\varphi_*\pi_i a_i = \psi_*\rho_i\varphi_i a_i = \sigma_i\psi_i\varphi_i a_i = 0$. Пусть $b \in \in \operatorname{Ker}\psi_*$. Для некоторого элемента $b_i \in B_i$ имеем $\rho_i b_i = b$, откуда $\sigma_i\psi_i b_i = \psi_*\rho_i b_i = \psi_* b = 0$. Поэтому $\sigma_i^j\psi_i b_i = 0$ для некоторого $j \geqslant i$ и, следовательно, $\psi_j\rho_i^j b_i = \sigma_i^j\psi_i b_i = 0$. Верхняя строка в последней диаграмме точна, поэтому существует такой элемент $a_j \in A_j$, что $\varphi_j a_j = \rho_i^j b_i$. Полагая $a = \pi_j a_j$, получим $\varphi_* a = \varphi_*\pi_j a_j = \rho_j\varphi_j a_j = = \rho_j\rho^i{}_i b_i = \rho_i b_i = b$, т. е. $b \in \operatorname{Im}\varphi_*$. Следовательно, нижняя строка точна. ∎

Если применить второе утверждение теоремы 11.2 и теорему 11.3 к случаю, когда φ_i — мономорфизм, а ψ_i — эпиморфизм, то получится

Следствие 11.4. *Если* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ — *прямые спектры из предыдущей теоремы и последовательность*

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{\varphi_i} B_i \xrightarrow{\varphi_i} C_i \longrightarrow 0$$

точна для любого $i \in I$, *то индуцированная последовательность для прямых пределов*

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{\varphi_*} B_* \xrightarrow{\psi_*} C_* \longrightarrow 0$$

также точна. ∎

Менее аккуратно, но более ярко это утверждение можно выразить так: *прямой предел точных последовательностей точен.* [Другими словами функтор $G_* : \mathcal{D}_I \to \mathcal{A}$ точен.]

Упражнения

1. (а) Пусть $A_n \cong Z$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и пусть π_n^{n+1}: $A_n \to A_{n+1}$ — умножение на n. Доказать, что

$$\lim_{\longrightarrow} A_n \cong Q.$$

(б) Группа является локально циклической тогда и только тогда, когда она — прямой предел циклических групп.

2. Если A_* — предел прямого спектра $\mathbf{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$, то для любого натурального числа m группа mA_* является пределом прямого спектра $\{mA_i\ (i \in I);\ \pi_i^j \mid mA_i\}$.

3. (а) Если A_* — предел прямого спектра $\mathbf{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ и $a \in A_*$, то существует такое $i \in I$ и такой элемент $a_i \in A_i$, что $\pi_i a_i = a$ и $o(a_i) = o(a)$.

(б)* Если α: $G \to A_*$, где G — конечно порожденная группа, то существует такое $i \in I$ и такое α_i: $G \to A_i$, что $\alpha = \pi_i \alpha_i$. [*Указание*: см. теорему 15.5.]

4. Прямой предел периодических групп [групп без кручения] снова является периодической группой [группой без кручения].

5. Пусть $\mathbf{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ — прямой спектр с пределом A_* и π_i: $A_i \to A_*$ — канонические отображения. Положим $A_\infty = A_*$ и $\pi_i^\infty = \pi_i$, где $i < \infty$ для всех $i \in I$. Доказать, что

$$\mathbf{A}' = \{A_i\ (i \in I \cup \{\infty\});\ \pi_i^j\}$$

— прямой спектр с пределом A_*.

6. Если $\mathbf{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ и $\mathbf{B} = \{B_i\ (i \in I);\ \rho_i^j\}$ — прямые спектры групп, то

$$\{A_i \oplus B_i\ (i \in I);\ \pi_i^j \oplus \rho_i^j\}$$

— снова прямой спектр, предел которого является прямой суммой прямых пределов спектров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

7. Привести пример, показывающий, что прямой предел расщепляющихся точных последовательностей может не расщепляться. [См. следствие 29.5. Почему это не противоречит упражнению 6?]

8. Показать, что прямой предел длинных точных последовательностей также точен.

9. Где ошибка в следующих рассуждениях? Используя пример 3 на стр. 71, получаем, что последовательность $0 \to Z(p^\infty) \to Z(p^\infty) \to Z(p^\infty) \to 0$ можно рассматривать как прямой предел точных последовательностей $0 \to Z(p^n) \to Z(p^{2n}) \to Z(p^n) \to 0$, поэтому в силу следствия 11.4 она должна быть точной.

10. Показать на примере, что подфунктор F тождественного функтора может не коммутировать с прямыми пределами.

§ 12. Обратные пределы

Рассмотрим теперь обратные пределы; они в некотором смысле двойственны прямым пределам.

Предположим, что A_i $(i \in I)$ — система групп, где снова индексы пробегают направленное множество I, и что для любой пары индексов $i, j \in I$, где $i \leqslant j$, дан гомоморфизм

$$\pi_i^j \colon A_j \to A_i \quad (i \leqslant j),$$

причем

1) π_i^i — тождественное отображение группы A_i для любого $i \in I$;

2) для всех $i \leqslant j \leqslant k$ из I имеет место $\pi_i^j \pi_j^k = \pi_i^k$. Тогда система

$$\mathbf{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$$

называется *обратным спектром*. *Обратным* [или *проективным*] *пределом* или просто *пределом обратного спектра*

$$A^* = \varprojlim{}_I A_i$$

называется подмножество прямого произведения $A = \prod_{i \in I} A_i$, состоящее из всех векторов $a = (\ldots, a_i, \ldots)$, для которых

$$\pi_i^j a_j = a_i \quad (i \leqslant j).$$

A^* является подгруппой группы A, так как если $a, a' \in A^*$, то для координат этих элементов выполнены равенства $\pi_i^j a_j = a_i$, $\pi_i^j a_j' = a_i'$, откуда $\pi_i^j (a_j - a_j') = a_i - a_i'$, т. е. $a - a' \in A^*$.

Важно отметить следующие простые факты, касающиеся обратных пределов.

а) *Существуют такие гомоморфизмы*

$$\pi_i \colon A^* \to A_i \ (i \in I),$$

что все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A^* & & \\ \pi_j \downarrow & \searrow \pi_i & \\ A_j & \xrightarrow{\pi_i^j} & A_i \end{array} \qquad (i \leqslant j) \qquad (1)$$

коммутативны.

В самом деле, $\pi_i \colon a \mapsto a_i$ [т. е. ограничение i-й координатной проекции группы $\prod A_i$ на A^*] удовлетворяет этому условию. Гомоморфизмы π_i мы будем называть *каноническими*.

б) *Если каждый гомоморфизм π_i^j — мономорфизм, то все π_i — мономорфизмы.*

Предположим, что π_i^j — мономорфизм, и пусть $\pi_i a = 0$ для некоторого $a \in A^*$, $i \in I$. Если дано $j \in I$, возьмем такое $k \in I$, что $i, j \leqslant k$. Теперь $\pi_i^k \pi_k a = \pi_i a = 0$, поэтому, в силу наших предположений $\pi_k a = 0$. Отсюда $\pi_j a = \pi_j^k \pi_k a = 0$ для каждого j, т. е. $a = 0$.

в) *Если K — кофинальная подсистема в I, то*

$$\underleftarrow{\lim}_K A_k \cong \underleftarrow{\lim}_I A_i.$$

Для $a' \in \underleftarrow{\lim}_K A_k \subseteq \prod_{k \in K} A_k$ существует такой однозначно определенный элемент $a \in \underleftarrow{\lim}_I A_i$, что k-е координаты элементов a' и a при любом $k \in K$ совпадают. Если положить $a = (\ldots, a_i, \ldots)$, где $a_i = \pi_i^k a_k'$ $(i \leqslant k)$, то $a' \mapsto a$ будет изоморфизмом между данными двумя обратными пределами.

г) *A^* является пересечением ядер некоторых эндоморфизмов группы $\prod_{i \in I} A_i$.*

Пусть (i, j) — пара элементов из I, где $j \geqslant i$. Ей соответствует эндоморфизм прямого произведения $\prod A_i$

$$\theta_{(i,j)}(\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots) \mapsto (\ldots, 0, a_i - \pi_i^j a_j, 0, \ldots),$$

где, самое большее, i-я координата отлична от нуля. Если мы сравним это с определением обратного предела, то станет ясно, что

$$A^* = \bigcap_{(i,j)} \operatorname{Ker} \theta_{(i,j)},$$

где (i, j) пробегает все пары указанного выше вида.

д) *Если все группы в обратном спектре $\mathbf{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ являются (хаусдорфовыми) топологическими группами, а все π_i^j — непрерывные гомоморфизмы, то обратный предел A^* есть замкнутая подгруппа группы $\prod A_i$ [если считать эту группу снабженной топологией произведения], а канонические гомоморфизмы π_i: $A^* \to A_i$ непрерывны.*

Если элемент $(\ldots, a_i, \ldots) \in \prod A_i$ не лежит в обратном пределе A^*, то в множестве I существуют такие элементы $i < j$, что $a_i \neq \pi_i^j a_j$. В силу хаусдорфовости в A_i можно найти такие непересекающиеся открытые подмножества U, V, что $a_i \in U$, $\pi_i^j a_j \in V$. Теперь множество всех элементов $(\ldots, b_i, \ldots) \in \prod A_i$, где $b_i \in U$, $\pi_i^j b_j \in V$, является открытым подмножеством в $\prod A_i$, содержащим $(\ldots, a_i, \ldots)$ и не пересекающимся с A^*. Последнее утверждение следует из непрерывности координатных проекций.

Справедливо утверждение, двойственное теореме 11.1.

Теорема 12.1. *Обратный предел A^* обратного спектра $\mathbf{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ обладает следующим свойством: если G — группа*

и $\sigma_i\colon G \to A_i$ *— гомоморфизмы, для которых диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \sigma_j \downarrow & \searrow \sigma_i & \\ A_j & \xrightarrow{\pi_i^j} & A_i \end{array} \qquad (i \leqslant j) \tag{2}$$

коммутативны, то существует единственный гомоморфизм $\sigma\colon G \to A^*$, *для которого коммутативны все диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sigma} & A^* \\ & \sigma_i \searrow & \downarrow \pi_i \\ & & A_i \end{array} \qquad (i \in I) \tag{3}$$

[π_i *— канонический гомоморфизм*]. *Это свойство определяет* A^* *и* π_i *однозначно с точностью до изоморфизма.*

Для элемента $g \in G$ положим $\sigma g = (\ldots, \sigma_i g, \ldots) \in \prod A_i$. В силу коммутативности диаграммы (2) $\sigma g \in A^*$. Следовательно, $\sigma\colon G \to A^*$ — гомоморфизм, для которого $\sigma_i g = \pi_i \sigma g$, откуда вытекает коммутативность диаграммы (3). Если гомоморфизм $\sigma'\colon G \to A^*$ также превращает все диаграммы (3) в коммутативные, то $\pi_i(\sigma - \sigma') = 0$ для каждого i. Следовательно, при $g \in G$ каждая координата элемента $(\sigma - \sigma')g$ равна нулю, т. е. $\sigma - \sigma' = 0$.

Чтобы доказать второе утверждение, предположим, что A_0 и отображения $\tau_i\colon A_0 \to A_i$ обладают свойством, сформулированным в первом утверждении теоремы. Тогда существуют такие однозначно определенные гомоморфизмы $\sigma\colon A_0 \to A^*$ и $\sigma_0\colon A^* \to A_0$, что $\pi_i \sigma = \tau_i$ и $\tau_i \sigma_0 = \pi_i$. Отсюда заключаем, что $\pi_i = \pi_i \sigma \sigma_0$ для каждого i и, следовательно, $\sigma\sigma_0$ — тождественное отображение группы A^*. Это означает, что $\sigma_0 A^*$ — прямое слагаемое группы A_0. Из единственности отображения $G \to A_0$ для любой группы G получаем, что $\sigma_0 A^* = A_0$, т. е. σ_0 — изоморфизм. ∎

Пример 1. Пусть

$$A = \prod_{i \in I} B_i$$

— прямое произведение групп B_i. Обозначим через J совокупность всех конечных подмножеств α множества индексов I, где $\alpha \leqslant \beta$ означает «α — подмножество в β». Для $\alpha \in J$ пусть $A_\alpha = \bigoplus_{i \in \alpha} B_i$, и для $\alpha \leqslant \beta$ пусть π_α^β — проектирование $A_\beta \to A_\alpha$ [т. е. отбрасывание координат с индексами из β, но не из α]. Тогда

$$A^* = \varprojlim{}_J A_\alpha \cong A.$$

Чтобы это доказать, обозначим через π_α канонические отображении из диаграммы (1), а через σ_α — проекции $A \to A_\alpha$. По теореме 12.1 существует однозначно определенный гомоморфизм $\sigma\colon A \to A^*$, для которого $\pi_\alpha \sigma = \sigma_\alpha$. Если $\sigma a = 0$ при некотором $a \in A$, то $\sigma_\alpha a = \pi_\alpha \sigma a = 0$ для всех $\alpha \in J$ и, таким образом,

$a = 0$, т. е. σ — мономорфизм. Если $a^* = (\ldots, a_\alpha, \ldots) \in A^*$, то пусть $a_\alpha = b_{i_1} + \ldots + b_{i_k}$ ($b_i \in B_i$), где $\alpha = \{i_1, \ldots, i_k\}$. В силу выбора π_α^β, если $i_1 \in \beta$, то i_1-я координата элемента a_β равна b_{i_1}. Поэтому a^* определяет элемент $(\ldots, b_i, \ldots) \in A$. Из определения гомоморфизма σ, данного в доказательстве теоремы 12.1, сразу следует, что $\sigma(\ldots, b_i, \ldots) = a^*$. Таким образом, σ — эпиморфизм, т. е. изоморфизм.

Пример 2. Пусть $C_n = \langle c_n \rangle$ — циклическая группа порядка p^n ($n = 1, 2, \ldots$), и пусть отображение π_n^{n+1}: $C_{n+1} \to C_n$ таково, что $\pi_n^{n+1} c_{n+1} = c_n$. Тогда ясно, что такое π_n^m ($m \geqslant n$). Теперь $\{C_n\ (n = 1, 2, \ldots);\ \pi_n^m\}$ — обратный спектр и

$$C^* = \varprojlim{}_n C_n \cong J_p.$$

Если π_n — каноническое отображение $C^* \to C_n$ и если σ_n: $J_p \to C_n$ таково, что $\sigma_n 1 = c_n$ ($1 \in J_p$), то существует такой однозначно определенный гомоморфизм σ: $J_p \to C^*$, что $\pi_n \sigma = \sigma_n$. Так как никакой отличный от нуля элемент из J_p не может лежать во всех ядрах $\operatorname{Ker} \sigma_n$, то $\operatorname{Ker} \sigma = 0$. Если $c = (c_1', \ldots, \ldots, c_n', \ldots) \in C^*$, где $c_n' = k_n c_n$ ($k_n \in \mathbb{Z}$), то в силу выбора гомоморфизма π_n^{n+1} имеем $k_{n+1} \equiv k_n \bmod p^n$ и существует такое целое p-адическое число τ, что $\tau \equiv k_n \bmod p^n$ для каждого n. Таким образом, $\sigma_n \tau = c_n'$, и σ — эпиморфизм.

Пример 3. Пусть A_i ($i \in I$) — подгруппы группы A и $A_\infty = \bigcap_{i \in I} A_i$. Будем считать, что $i < \infty$ для всех $i \in I$ и что $i \leqslant j$ при $i, j \in I$, если $A_j \subseteq A_i$, и пусть π_i^j — естественное вложение $A_j \to A_i$. Тогда

$$A = \{A_i\ (i \in I \cup \{\infty\});\ \pi_i^j\}$$

— обратный спектр с пределом A_∞. В самом деле, $A^* = \varprojlim A_i$ состоит из всех векторов из $\prod A_i$, координаты которых являются одним и тем же элементом из A_∞. Этот пример показывает, что пересечения можно рассматривать как обратные пределы.

Понятие гомоморфизма для обратных спектров можно определить аналогично тому, как это делалось для прямых спектров. Пусть

$$\boldsymbol{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B} = \{B_i\ (i \in I);\ \rho_i^j\}$$

— обратные спектры, элементы которых занумерованы с помощью одного и того же направленного множества индексов I. *Гомоморфизмом* φ: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ называется множество гомоморфизмов $\{\varphi_i$: $A_i \to B_i\ (i \in I)\}$, удовлетворяющее тому условию, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\pi_i^j} & A_i \\ \varphi_j \downarrow & & \downarrow \varphi_i \\ B_j & \xrightarrow{\rho_i^j} & B_i \end{array} \qquad (i \leqslant j) \tag{4}$$

коммутативны.

Теорема 12.2. *Если φ: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ — гомоморфизм между обратными спектрами $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, то существует такой однозначно определенный гомо-*

морфизм

$$\varphi^*:\ A^* = \underleftarrow{\lim}_I A_i \to B^* = \underleftarrow{\lim}_I B_i,$$

что для любого $i \in I$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} A^* & \xrightarrow{\pi_i} & A_i \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi_i \\ B^* & \xrightarrow{\rho_i} & B_i \end{array} \qquad (5)$$

коммутативна [π_i, ρ_i — *канонические отображения*]. *Если каждый гомоморфизм* φ_i — *мономорфизм, то и* φ^* — *мономорфизм.*

Гомоморфизмы φ_i [$i \in I$] индуцируют гомоморфизм

$$\breve{\varphi} = \prod \varphi_i:\ \prod A_i \to \prod B_i.$$

Из коммутативности диаграммы (4) следует, что если $a = (\ldots, a_i, \ldots) \in A^*$, то образ элемента a при $\breve{\varphi}$ содержится в B^*. Поэтому можно определить $\varphi^*: A^* \to B^*$ как ограничение $\breve{\varphi}$ на A^*. При таком φ^* имеем $\varphi_i\pi_i a = \varphi_i a_i = \rho_i\psi^* a$, т. е. диаграмма (5) коммутативна. Если гомоморфизм φ_0: $A^* \to B^*$ превращает (5) в коммутативную диаграмму при каждом i, то ρ_i ($\varphi^* - \varphi_0$) $= 0$ для любого i, т. е. все координаты элемента ($\varphi^* - \varphi_0$) a равны нулю при любом $a \in A^*$. Следовательно, $\varphi^* - \varphi_0 = 0$.

Если каждый гомоморфизм φ_i—мономорфизм и $\varphi^* a = 0$ для некоторого $a \in A^*$, то $\varphi_i\pi_i a = \rho_i\varphi^* a = 0$, откуда $\pi_i a = 0$ для любого $i \in I$, т. е. $a = 0$. ∎

Для фиксированного направленного множества I рассмотрим категорию $\mathcal{J}_I$ всех обратных спектров, занумерованных с помощью элементов из I, с гомоморфизмами, определенными так же, как перед теоремой 12.2. Функция L^*, ставящая в соответствие обратиому спектру $\boldsymbol{A}$ его обратиый предел A^*, а гомоморфизму φ: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ — гомоморфизм φ^*: $A^* \to B^*$, является, как легко видеть из теоремы 12.2, функтором из категории $\mathcal{J}_I$ в категорию $\mathcal{A}$. Следовательно, мы можем назвать φ^* естественным гомоморфизмом между обратными пределами.

Для обратного предела точных последовательностей результат получается слабее, чем для прямых пределов.

Теорема 12.3. *Пусть*

$$\boldsymbol{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\},\ \boldsymbol{B} = \{B_i\ (i \in I);\ \rho_i^j\}, \boldsymbol{C} = \{C_i\ (i \in I);\ \sigma_i^j\}$$

— *обратные спектры с одним и тем же множеством индексов* I *и* φ: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, ψ: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ — *такие гомоморфизмы, что последовательность*

$$0 \to \boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{B} \xrightarrow{\psi} \boldsymbol{C}$$

точна [*т. е. для каждого* i *точна последовательность*

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{\varphi_i} B_i \xrightarrow{\psi_i} C_i].$$

Тогда для обратных пределов имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi^*} B^* \xrightarrow{\psi^*} C^*,$$

где φ^*, ψ^* — *отображения, описанные в теореме* 12.2.

Точность на A^* — это как раз второе утверждение теоремы 12.2. Из определения φ^*, ψ^* ясно, что $\psi^*\varphi^* = 0$. Если π_i, ρ_i, σ_i — канонические отображения, то диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & A^* & \xrightarrow{\varphi^*} & B^* & \xrightarrow{\psi^*} & C^* & \\ & \downarrow \pi_i & & \downarrow \rho_i & & \downarrow \sigma_i & (i \in I) \\ 0 \longrightarrow & A_i & \xrightarrow{\varphi_i} & B_i & \xrightarrow{\psi_i} & C_i & \end{array}$$

коммутативна. Чтобы доказать, что ее верхняя строка точна на B^*, возьмем $b \in \operatorname{Ker} \psi^*$. В силу того, что $\psi_i\rho_i b = \sigma_i\psi^* b = 0$, и точности нижней строки при каждом $i \in I$ существует $a_i \in A_i$, для которого $\varphi_i a_i = \rho_i b$. При $j > i$ имеем $\varphi_i\pi_i^j a_j = \rho_i^j\varphi_j a_j = \rho_i^j\rho_j b = \rho_i b = \varphi_i a_i$, откуда $\pi_i^j a_j = a_i$, так как φ_i — мономорфизм. Мы заключаем, что $a = (\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots) \in A^*$. Для этого элемента a имеем $\rho_i\varphi^* a = \varphi_i\pi_i a = \varphi_i a_i = \rho_i b$ при каждом i, откуда $\varphi^* a = b$. ■

Заметим, что в силу теоремы 12.3 функтор $L^*\colon I_I \to \mathcal{A}$ является точным слева.

Приводимое ниже упражнение 6 показывает, что теорему 12.3 нельзя усилить, приписав в конце рассматриваемых там точных последовательностей $\to 0$.

Упражнения

1. Пусть $A_n \cong Z(n) = \langle a_n \rangle$ и при $n \mid m$ пусть $\pi_n^m\colon A_m \to A_n$ — гомоморфизм, отображающий a_m на a_n. Тогда $\{A_n (n \in I);\ \pi_n^m\}$ — обратный спектр [множество I частично упорядочено с помощью отношения делимости], обратным пределом которого является $\prod_p J_p$.

2. Пусть $A_n \cong Z(p^\infty)$ и $\pi_n^{n+1}\colon A_{n+1} \to A_n$ — умножение на p. Тогда обратным пределом является группа всех p-адических чисел.

3. Если $A = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ и $B = \{B_i\ (i \in I);\ \rho_i^j\}$ — обратные спектры, то

$$\{A_i \oplus B_i\ (i \in I);\ \pi_i^j \oplus \rho_i^j\}$$

— также обратный спектр, а его обратный предел равен прямой сумме обратных пределов спектров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

4. Обратный предел групп без кручения является группой без кручения, но обратный предел периодических групп может быть ненулевой группой без кручения.

5. Если в обратном спектре $\{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ все отображения π_i^j являются изоморфизмами, то и все π_i — изоморфизмы.

6. Пусть $A_n = Z$ и $\pi_n^m = 1_Z$ для любых натуральных чисел n и $m\ (\geqslant n)$. Пусть $B_n = Z(p^n)$, а ρ_n^m переводит 1 из $Z(p^m)$ в 1 из $Z(p^n)$. Показать, что

(а) $\{A_n;\ \pi_n^m\}$ и $\{B_n;\ \rho_n^m\}$ — такие обратные спектры, что $\varphi = \{\varphi_n\}$, где $\varphi_n\colon A_n \to B_n$ — канонические отображения, является эпиморфизмом, но

(б) индуцированный гомоморфизм φ^* между обратными пределами этих спектров — не эпиморфизм.

7. Показать, что обратный предел расщепляющихся точных последовательностей не обязан быть расщепляющейся точной последовательностью.

8. Пусть $\boldsymbol{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ — обратный спектр с пределом A^* и $\pi_i\colon A^* \to A_i$ — канонические отображения. Положим $A_\infty = A^*$, $\pi_i^\infty = \pi_i$, $i < \infty$ для всех $i \in I$. Показать, что

$$\boldsymbol{A}' = \{A_i\ (i \in I \cup \{\infty\});\ \pi_i^j\}$$

— обратный спектр с тем же пределом A^*.

§ 13. Полнота и пополнения

Для нас будут иметь большое значение абелевы группы, полные в некоторой топологии. Поэтому в этом параграфе мы рассмотрим полноту и процессы пополнения. Все рассматриваемые здесь топологии являются линейными.

Пусть на группе A линейная топология определена с помощью дуального идеала $\mathbf{D}$ структуры $\mathbf{L}(A)$. Занумеруем подгруппы U из $\mathbf{D}$ с помощью множества индексов I и будем считать $i \leqslant j$ для $i, j \in I$, если $U_i \supseteq U_j$. Тогда I как частично упорядоченное множество будет дуально изоморфно $\mathbf{D}$, т. е. I будет направленным множеством.

Как обычно, *сетью* в группе A назовем любое множество $\{a_i\}_{i \in I}$ элементов $a_i \in A$, занумерованных с помощью множества индексов I; другими словами, сеть есть функция, определенная на множестве I, со значениями в группе A. Говорят, что сеть $\{a_i\}_{i \in I}$ *сходится* к *пределу* $a \in A$, если для любого $i \in I$ существует такой индекс $j \in I$, что $a_k - a \in U_i$ как только $k \geqslant j$. Если группа A хаусдорфова в заданной топологии, то пределы определены однозначно; но если группа A не хаусдорфова, то пределы определены однозначно только по модулю

$\bigcap_i U_i$. Можно применить классическое доказательство и получить, что подгруппа B группы A замкнута тогда и только тогда, когда она содержит пределы сходящихся сетей, элементы которых лежат в B.

Очевидно, если сеть $\{a_i\}_{i\in I}$ сходится, то и всякая ее кофинальная подсеть сходится и имеет тот же предел. Чтобы упростить рассуждения, мы преимущественно будем рассматривать сети $\{b_i\}_{i\in I}$, где для любого $i \in I$ имеет место включение $b_k - a \in U_i$ при всех $k \geqslant i$ [т. е. в определении сходимости можно выбрать $j = i$]. Такие сети мы будем называть *чисто сходящимися*.

Сеть $\{a_i\}_{i\in I}$ называется *сетью Коши*, если для любого заданного индекса $i \in I$ существует такой индекс $j \in I$, что

$$a_k - a_{k'} \in U_i, \text{ если } k,\ k' \geqslant j.$$

Так как в данном случае U_i — подгруппа, то из $a_k - a_j$, $a_{k'} - a_j \in U_i$ уже вытекает $a_k - a_{k'} \in U_i$. Таким образом, чтобы установить, что $\{a_i\}$ — сеть Коши, достаточно знать, что $a_k - a_j \in U_i$ для всех $k \geqslant j$. Очевидно, всякая кофинальная подсеть сети Коши снова является сетью Коши, и если кофинальная подсеть сети Коши сходится, то и вся сеть сходится к тому же пределу. Мы будем рассматривать сети Коши $\{b_i\}_{i\in I}$, *чистые* в том смысле, что для любого $i \in I$ справедливо включение

$$b_k - b_i \in U_i, \text{ если } k \geqslant i.$$

Если чистая сеть Коши $\{b_i\}_{i\in I}$ сходится к пределу b, то она чисто сходится к b. В самом деле, если $b_j - b \in U_i$ при некотором j, которое можно считать $\geqslant i$, то из $b_j - b_i \in U_i$ вытекает $b_i - b \in U_i$, и поэтому включение $b_k - b_i \in U_i$ $(k \geqslant i)$ дает $b_k - b \in U_i$ для всех $k \geqslant i$.

Группа A называется *полной* в заданной топологии, если она хаусдорфова и если всякая сеть Коши в группе A имеет в A предел. Можно получить эквивалентное этому определение, если ограничиться чистыми сетями Коши. [Заметим, что в отличие от многих авторов мы определили полноту только для хаусдорфовых пространств.] Имеет место довольно простое

Предложение 13.1. *Пусть группа A полна в некоторой топологии. Подгруппа группы A замкнута тогда и только тогда, когда она полна в индуцированной в ней топологии.*

Доказательство этого можно найти, например, в книге Келли «Общая топология» («Наука», М., 1968). ■

В следующем утверждении существенно предположение счетности.

Предложение 13.2. *Если B — замкнутая подгруппа полной группы A, удовлетворяющей первой аксиоме счетности, то факторгруппа A/B полна в индуцированной топологии.*

По предположению существует такая база $\{U_m\}_m$ окрестностей нуля в A, что $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ и $\bigcap_m U_m = 0$. Группы $\overline{U}_m = (U_m + B)/B$ $(m = 1, 2, \ldots)$ образуют базу окрестностей нуля в A/B. Пусть

$a_1 + B, \ldots, a_m + B, \ldots$ —последовательность Коши в группе A/B, которую без ограничения общности можно считать чистой, т. е. такой, что $a_{m+1} - a_m + B \subseteq U_m + B$ для любого m. Положим $c_1 = a_1$ и предположим, что элементы $c_1, \ldots, c_m \in A$ уже выбраны так, что $c_i \in a_i + B$ и $c_i - c_{i-1} \in U_{i-1}$, $i = 2, \ldots, m$. Тогда $a_{m+1} - c_m = u_m + b_m$ для некоторых $u_m \in U_m$, $b_m \in B$. Положим $c_{m+1} = a_{m+1} - b_m \in a_{m+1} + B$ и получим $c_{m+1} - c_m \in U_m$. Таким образом, существует последовательность $\{c_m\}_m$ со свойствами $c_m \in a_m + B$ и $c_{m+1} - c_m \in U_m$ при любом m. Другими словами, с помощью заданной последовательности Коши $\{a_m + B\}$ группы A/B можно получить последовательность Коши $\{c_m\}$ в группе A. Если $a \in A$ — предел последовательности $\{c_m\}$, то $\bar{a} = a + B$ — предел последовательности $\{a_m + B\}$. Так как B — замкнутая подгруппа группы A, то группа A/B хаусдорфова. ∎

Пусть A_t $(t \in J)$ — семейство групп, в каждой из которых введена линейная топология, скажем, определенная с помощью дуального идеала $\mathbf{D}_t$ структуры $\mathbf{L}(A_t)$. Пусть $G = \prod A_t$ — прямое произведение этих групп, а π_t есть t-я координатная проекция, π_t: $G \to A_t$. Напомним, что *топологией произведения* на G называется топология, при которой подбазой окрестностей нуля служит множество всех подгрупп $\pi_t^{-1} U_t$, где $U_t \in \mathbf{D}_t$, $t \in J$. Это опять линейная топология, а π_t — непрерывные открытые гомоморфизмы.

На прямом произведении $\prod A_t$ можно также определить другую топологию, которая для нас будет особенно важной. Без ограничения общности можно предположить, что в каждой группе A_t база окрестностей нуля занумерована с помощью одного и того же множества индексов I: в группе A_t имеем базу окрестностей нуля $\{U_{ti}\}_{i \in I}$. [Заметим, что из $j \geqslant i$ в I следует $U_{ti} \supseteq U_{tj}$ для каждого t, но может быть $U_{ti} = U_{tj}$ при $i \neq j$.] *Блочной топологией* на группе $G = \prod A_t$ называется топология с базой окрестностей нуля, состоящей из подгрупп

$$\prod_t U_{ti} = U_i^* \quad (i \in I).$$

Эта топология линейна; она хаусдорфова в точности тогда, когда все группы A_t хаусдорфовы, и удовлетворяет первой аксиоме счетности, если первой аксиоме счетности удовлетворяют все группы A_t. Наличие включения $U_i^* \subseteq \pi_t^{-1} U_{ti}$ [для каждого t] показывает, что блочная топология тоньше [т. е. для нее существует больше открытых множеств], чем топология произведения. Поэтому отображения π_t снова непрерывны и открыты.

Заметим, что блочная топология может зависеть от способа нумерации подгрупп U_{ti}.

Важным частным случаем является тот, когда все группы A_t снабжены Z-адической [p-адической] топологией. Тогда блочная топология в $\prod A_t$ является также Z-адической [p-адической] топологией.

Блочная топология имеет то преимущество, что в прямом произведении мы можем использовать то же множество I для нумерации эле-

ментов сетей. Элементарный подсчет показывает, что в блочной топологии группы $G = \prod A_t$ проекция $\{\pi_t g_i\}_{i \in I}$ (чистой) сети Коши $\{g_i\}_{i \in I}$ группы G является [чистой] сетью Коши в A_t, и сеть $\{g_i\}_{i \in I}$ является чистой сетью Коши, если для каждого $t \in J$ множество $\{\pi_t g_i\}_{i \in I}$ есть чистая сеть Коши в A_t.

Предложение 13.3. *Прямое произведение полно в блочной топологии тогда и только тогда, когда каждая его компонента полна.*

Пусть группа $G = \prod A_t$ полна в блочной топологии, и пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — сеть Коши в группе A_t. Тогда $\{\rho_t a_i\}_{i \in I}$ — сеть Коши в G [ρ_t обозначает t-е координатное вложение]. Пусть эта сеть имеет пределом элемент $g \in G$. Тогда, очевидно, $\pi_t g$ — предел сети $\{a_i\}$. Обратно, предположим, что группы A_t полны, и пусть $\{g_i\}_{i \in I}$ — чистая сеть Коши в G. Если $a_t \in A_t$ является пределом сети Коши $\{\pi_t g_t\}_{i \in I}$ и если элемент $g \in G$ таков, что $\pi_t g = a_t$, то, как непосредственно видно, g есть предел сети $\{g_i\}_{i \in I}$. ∎

Если все группы A_t снабжены Z-адической [p-адической] топологией, то получаем

Следствие 13.4. *Прямое произведение групп полно в Z-адической [p-адической] топологии тогда и только тогда, когда каждая его компонента полна в своей Z-адической [p-адической] топологии.* ∎

В оставшейся части этого параграфа остановимся на вопросе о вложении группы A, в которой определена линейная топология, в полную группу $\hat{A}$. Рассмотрим два метода, один из них основан на сетях Коши, другой — на обратных пределах.

Пусть A — топологическая [не обязательно хаусдорфова] группа и $\{U_t\}_{i \in I}$ — база окрестностей нуля в ней. Сеть $\{a_i\}_{i \in I}$ из A можно отождествить с элементом прямого произведения $G = A^I$, если установить естественное соответствие

$$\{a_i\}_{i \in I} \mapsto (\ldots, a_i, \ldots).$$

Чтобы не создавать ненужных осложнений, мы ограничимся чистыми сетями Коши; это можно сделать, не нарушая общности. Легко проверить, что чистые сети Коши группы A составляют подгруппу C группы G, а сети, чисто сходящиеся к нулю, составляют подгруппу E в C. Непосредственно видно, что E — замкнутая подгруппа группы C, если на C определена топология произведения или блочная топология. Следовательно, $\hat{A} = C/E$ — хаусдорфова топологическая группа в каждой из соответствующих индуцированных топологий.

Лемма 13.5. *Топология произведения и блочная топология группы A^I индуцируют на $\hat{A}$ одну и ту же топологию.*

Так как эти две топологии сравнимы между собой, то достаточно показать, что для любой окрестности U_i^* в блочной топологии суще-

ствует окрестность $\pi_j^{-1}U_k$ в топологии произведения, для которой имеет место включение

$$(C \cap \pi_j^{-1}U_k) + E \subseteq (C \cap U_i^*) + E.$$

В силу модулярного закона для этого достаточно показать, что

$$C \cap \pi_k^{-1}U_k \subseteq U_i^* + E.$$

Если $\{a_l\}_{l\in I}$ — чистая сеть Коши, содержащаяся в $\pi_i^{-1}U_i$, то не только $a_i \in U_i$, но и $a_j \in U_i$ при всех $j \geqslant i$. Поэтому $\{a_l\}_{l\in I} \in U_i^* + E$. ∎

Очевидным следствием этой леммы является то, что база окрестностей нуля в группе $\hat{A}$ может быть получена путем взятия подгрупп $\hat{U}_l$ группы $\hat{A}$, состоящих из всех таких чистых сетей Коши $\{a_l\}_{l\in I}$, что $a_l \in U_l$ для всех l.

Отображение

$$\mu : a \mapsto (\ldots, a, \ldots, a, \ldots) + E$$

группы A в группу $\hat{A}$, очевидно, является непрерывным открытым гомоморфизмом. Кроме того, если группа A хаусдорфова, то μ — топологический изоморфизм между группами A и μA, если в μA рассматривать индуцированную топологию группы $\hat{A}$ [эта топология на группе $\hat{A}$ описана в лемме 13.5].

Теорема 13.6. *Группа $\hat{A}$ полна, а μA — ее плотная подгруппа.*

Если даны элемент $(\ldots, a_l, \ldots) + E \in \hat{A}$ и окрестность U_l^* нуля группы G, то, очевидно, элемент μa_l лежит в U_l^*-окрестности элемента $(\ldots, a_l, \ldots) + E$. Следовательно, подгруппа μA плотна в $\hat{A}$, и поэтому, чтобы доказать полноту группы $\hat{A}$, нам нужно только проверить, что сети Коши из μA сходятся к элементам из $\hat{A}$. Чистая сеть Коши из μA имеет вид $\{\mu a_l\}_{l\in I}$, где $\{a_l\}_{l\in I}$ — чистая сеть Коши в A. Можно непосредственно проверить, что $(\ldots, a_l, \ldots) + E$ — предел в $\hat{A}$ для сети $\{\mu a_l\}_{l\in I}$. ∎

Другой способ построения пополнений использует обратные пределы. Исходя снова из системы окрестностей нуля $\{U_i\}_{i\in I}$, полагаем $C_i = A/U_i$ и для $j \geqslant i$ из I рассматриваем гомоморфизмы $\pi_i^j : C_j \to C_i$, где $\pi_i^j(a + U_j) = a + U_i$. Тогда получается обратный спектр $C = \{C_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$, обратный предел которого обозначаем через $\hat{C}$. Заметим, что группы C_i берутся с дискретной топологией, а в группе $\hat{C}$ берется топология, индуцированная топологией произведения на группе $\prod C_i$. Таким образом, база $\{V_i\}_{i\in I}$ окрестностей нуля в $\hat{C}$ состоит из подгрупп $\hat{C} \cap \pi_i^{-1} 0$ [π_i обозначает i-ю координатную проекцию]. Очевидно, отображение

$$\alpha : a \mapsto (\ldots, a + U_i, \ldots) \in \hat{C}$$

является непрерывным и открытым гомоморфизмом.

Предложение 13.7. *Существует естественное отображение* $\lambda\colon \hat{A} \to \hat{C}$, *являющееся топологическим изоморфизмом со свойством* $\lambda\mu = \alpha$.

Если $\{a_i\}_{i\in I}$ — чистая сеть Коши, представляющая элемент из $\hat{A}$, то возьмем

$$\lambda\colon (\ldots, a_i, \ldots) + E \mapsto (\ldots, a_i + U_i, \ldots).$$

Тогда $\operatorname{Im}\lambda$ лежит в $\hat{C}$, так как $\pi_i^j(a_j + U_j) = a_j + U_i = a_i + U_i$ при $j \geqslant i$. Если $(\ldots, a_i + U_i, \ldots) \in \hat{C}$, то $\{a_i\}_{i\in I}$ — чистая сеть Коши, а другой выбор представителей смежных классов по подгруппам U_i дает тот же смежный класс по подгруппе E. Тот факт, что λ отображает окрестности на окрестности, очевиден. Также очевидно, что $\lambda\mu = \alpha$. ∎

Так как мы хотим говорить о группе $\hat{A} \cong \hat{C}$ как о *пополнении* группы A, необходимо иметь теорему единственности. Она будет вытекать из следующего свойства универсальности группы $\hat{A}$.

Теорема 13.8. *Если дан непрерывный гомоморфизм* φ *группы* A *в полную группу* G, *то существует и однозначно определен такой непрерывный гомоморфизм* $\hat{\varphi}\colon \hat{A} \to G$, *что* $\hat{\varphi}\mu = \varphi$.

Пусть $\{a_i\}_{i\in I}$ — сеть Коши в A, имеющая предел $\hat{a} \in \hat{A}$. Тогда из непрерывности гомоморфизма φ следует, что $\{\varphi a_i\}_{i\in I}$ — сеть Коши в G. Если $g \in G$ — ее предел, то единственная возможность определить непрерывное отображение $\hat{\varphi}$ — это положить $\hat{\varphi}\colon \hat{a} \mapsto g$. Остальные части утверждения очевидны. ∎

Из теоремы 13.8 следует, что группа $\hat{A}$ определена однозначно с точностью до топологического изоморфизма. Кроме того, $\mu\colon A \to \hat{A}$ — естественное отображение, так как если $\alpha : A \to B$ — непрерывный гомоморфизм, то коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu'} \\ \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & \hat{B} \end{array}$$

где смысл μ' очевиден, а $\hat{\alpha}$ — гомоморфизм, существование которого установлено в теореме 13.8.

Упражнения

1. Доказать, что группа μA [μ определено в тексте] топологически изоморфна группе A/U, где U — пересечение всех открытых подгрупп группы A.
2. Всякая компактная группа является полной.

3. Обратный предел полных групп является полной группой.

4. Если группа A имеет базу окрестностей нуля, состоящую из подгрупп конечного индекса, то пополнение группы A компактно.

5. Найти пополнение группы Z в p-адической [и в Z-адической] топологии.

6* (Лефшец). Группа A называется *линейно компактной*, если в ней определена такая хаусдорфова линейная топология, что если C_j — замкнутые подгруппы группы A и всякое конечное множество смежных классов $a_j + C_j$ ($a_j \in A$) имеет непустое пересечение, то пересечение всех классов $a_j + C_j$ также не пусто. Доказать следующие утверждения:

(а) в приведенном определении слово «замкнутые» может быть заменено словом «открытые»;

(б) если группа A линейно компактна и $\alpha: A \to B$ — непрерывный эпиморфизм, то группа B линейно компактна;

(в) если группа A линейно компактна, то этим же свойством обладает всякая ее замкнутая подгруппа;

(г) прямые произведения и обратные пределы линейно компактных групп сами линейно компактны [в топологии произведения];

(д) линейно компактные группы линейно компактны и во всякой более грубой топологии.

7*. (а) Всякая линейно компактная группа является полной.

(б) Группа линейно компактна в дискретной топологии тогда и только тогда, когда в ней выполнено условие минимальности для подгрупп.

(в) Привести пример полной группы, не являющейся линейно компактной, и пример линейно компактной группы, не являющейся компактной.

Замечания

Большинство результатов главы II могло быть сформулировано в более общем виде для определенных категорий. Систематическое изложение этих вопросов можно найти у Митчелла [Mitchell B., Theory of Categories, 1965].

В теоремах 8.1, 8.2, 11.1 и 12.1 отмечены свойства универсальности [и коуниверсальности] рассматриваемых понятий. Универсальность определенных объектов важна в общей теории категорий.

Теорема 8.4 о разложении в прямую сумму примарных групп является одной из основных; в случае конечных групп наличие такого разложения характеризует нильпотентные группы. Матлис [Matlis E., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **125** (1966), 147—179] рассматривал такие коммутативные области целостности R, что всякий периодический R-модуль M является прямой суммой подмодулей M_{P}, где для каждого $a \in M_{\mathsf{P}}$ порядок $o(a)$ содержится точно в одном максимальном идеале P кольца R. Он доказал, что R обладает этим свойством тогда и только тогда, когда в R каждый ненулевой идеал содержится лишь в коиечном числе максимальных идеалов, а всякий ненулевой простой идеал — точно в одном максимальном идеале.

В отличие от теоремы 8.4 теорему 8.5 легко перенести на произвольные модули: если модуль является объединением простых подмодулей, то он равен прямой сумме простых модулей [он тогда называется полупростым модулем]. Полупростые модули характеризуются тем условием, что всякий их подмодуль выделяется прямым слагаемым.

Проблема 3. (а) (Ирвин) Для каких подгрупп B группы A все B-высокие подгруппы изоморфны между собой?

(б) Тот же вопрос для B-высоких подгрупп, содержащих максимальную вполне характеристическую подгруппу группы A, не пересекающуюся с B.

Проблема 4. Указать верхнюю границу для числа неизоморфных B-высоких подгрупп группы A, в частности в случае, когда $B = A^1$.

Проблема 5. Исследовать группы, каждая бесконечная подгруппа B которых может быть вложена в прямое слагаемое мощности $|B|$.

См. Ирвин и Ричмен [1].

Проблема 6. Какие классы абелевых групп замкнуты а) относительно взятия подгрупп и прямых пределов? б) относительно эпиморфных образов и прямых пределов?

Примером здесь служат локальио циклические группы. Естественно, аналогичные вопросы могут быть поставлены и относительно других операций на классах; ср. § 18, упражнение 7.

Проблема 7 (Шарль). Описать функторные подгруппы, коммутирующие с прямыми произведениями [или с обратными пределами].

Проблема 8. Какие группы могут оказаться полными в некоторой метрической (линейной) топологии?

В связи с этим вопросом см. § 39.

Глава III

ПРЯМЫЕ СУММЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

В этой главе мы начинаем изучение важиых классов абелевых групп. Сначала мы косиемся прямых сумм циклических групп. Их зиачеиие объясияется тем, что они легко могут быть охарактеризованы с помощью достаточно хороших иивариаитов; исследоваиие же других классов абелевых групп основано до некоторой степеии иа том, что мы зиаем о прямых суммах циклических групп.

Первый параграф посвящеи свободиым группам и краткому изложению вопроса, как задать группу образующими и определяющими соотиошениями. Затем описываются коиечно порожденные группы; на так называемую Осиовиую теорему о них имеются ссылки в различиых ветвях математики. Для бесконечио порождениых групп можио установить критерии, при которых группа разлагается в прямую сумму циклических групп; однако, ими удобно пользоваться только в случае периодических групп. Один из наиболее используемых результатов заключается в том, что класс прямых сумм циклических групп замкиут относительно перехода к подгруппам.

Всякая абелева группа A содержит подгруппы, являющиеся прямыми суммами циклических групп. Те из этих подгрупп, которые в иекотором смысле максимальны, определяют кардинальные числа, зависящие только от группы A. Это ведет к поиятию раигов, которые являются очень полезными инвариантами для группы A.

§ 14. Свободные абелевы группы. Определяющие соотношения

Свободной абелевой группой называется прямая сумма бесконечных циклических групп. Если эти циклические группы порождаются элементами x_i $(i \in I)$, то свободная группа имеет вид

$$F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle.$$

Таким образом, группа F состоит из всех конечных линейных комбинаций

$$g = n_1 x_{i_1} + \ldots + n_k x_{i_k}, \qquad (1)$$

где элементы $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ все различны, n_j — отличные от нуля целые числа, k — неотрицательное целое число. В силу определения прямых сумм две линейные комбинации вида (1) являются равными элементами группы F тогда и только тогда, когда они отличаются, самое большее, порядком, в котором идут слагаемые. Сложение двух линейных комбинаций проводится формально, путем сложения коэффициентов

при одинаковых элементах x_i. Очевидно, мы могли бы также определить группу F, исходя из непустого множества

$$X = \{x_i\}_{i \in I}$$

символов x_i, называемого *системой свободных образующих*, и затем беря в качестве F совокупность всех формальных выражений вида (1), где равенство и сложение определяются указанным выше образом. Ввиду этого группа F называется также *свободной группой, построенной на множестве* X.

Очевидно, свободная группа F определяется однозначно с точностью до изоморфизма мощностью $\mathfrak{m}$ множества индексов I. Таким образом, мы вправе писать $F_{\mathfrak{m}}$, если дана свободная группа с $\mathfrak{m}$ свободными образующими. Имеет место следующий простой результат.

Предложение 14.1. *Свободные группы* $F_{\mathfrak{m}}$ *и* $F_{\mathfrak{n}}$, *где* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — *кардинальные числа, изоморфны тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

Достаточно проверить только необходимость этого условия. Пусть p — простое число и F — свободная группа с $\mathfrak{m}$ свободными образующими x_i. Так как каждый элемент $g \in F$ однозначно записывается в виде (1), ясно, что $g \in pF$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнено $p \mid n_1, \ldots, p \mid n_k$. Следовательно, F/pF как векторное пространство над простым полем характеристики p имеет базис $\{x_i + pF\}$ и размерность $\mathfrak{m}$. Так как размерность — инвариант векторных пространств, утверждение доказано. ■

Отсюда следует, что существует взаимно однозначное соответствие между неизоморфными свободными группами и кардинальными числами. Если $\mathfrak{m}$ — кардинальное число, соответствующее свободной группе F, то F называется группой *ранга* $\mathfrak{m}$. Ранг свободной группы F определен однозначно.

Следующий результат представляет собой одно из основных свойств свободных групп.

Теорема 14.2. *Множество* $X = \{x_i\}_{i \in I}$ *образующих группы* F *является системой свободных образующих* [*и, следовательно,* F *является свободной группой*] *тогда и только тогда, когда всякое отображение* φ *множества* X *в группу* A *может быть продолжено до* (*ровно одного*) *гомоморфизма* $\psi\colon F \to A$.

Пусть X — система свободных образующих группы F. Если $\varphi\colon x_i \to a_i$ — отображение множества X в группу A, то возьмем $\psi\colon F \to A$, где

$$\psi\,(n_1 x_{i_1} + \ldots + n_k x_{i_k}) = n_1 a_{i_1} + \ldots + n_k a_{i_k}.$$

В силу единственности записи вида (1) отображение ψ определено корректно. Легко проверить, что оно сохраняет операцию сложения. Обратно, предположим, что подмножество X группы F обладает ука-

занным в формулировке теоремы свойством. Пусть G — свободная группа с системой свободных образующих $\{y_i\}_{i\in I}$, где I — то же множество индексов, что и в системе X. По предположению отображение φ: $x_i \mapsto y_i$ $(i \in I)$ можно продолжить до гомоморфизма ψ: $F \to G$, который не может быть не чем иным, как отображением ψ: $n_1x_{i_1} + \ldots$ $\ldots + n_kx_{i_k} \mapsto n_1y_{i_1} + \ldots + n_ky_{i_k}$. Ясно, что ψ — изоморфизм. ∎

В частности, отображая множество X на систему образующих группы A, мы получаем следующий результат.

Следствие 14.3. *Всякая группа, имеющая не более $\mathfrak{m}$ образующих, является эпиморфным образом группы $F_{\mathfrak{m}}$.* ∎

Если $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число, то группа $F_{\mathfrak{m}}$ содержит $2^{\mathfrak{m}}$ подмножеств и, следовательно, имеет не более $2^{\mathfrak{m}}$ подгрупп и факторгрупп. Отсюда получается, что существует не более $2^{\mathfrak{m}}$ попарно не изоморфных групп мощности $\leqslant \mathfrak{m}$.

Приведем одно элементарное и часто используемое свойство свободных групп.

Теорема 14.4. *Если B — такая подгруппа группы A, что A/B — свободная группа, то B служит для A прямым слагаемым.*

По лемме 9.4 достаточно проверить это для случая, когда A/B — бесконечная циклическая группа, скажем, $A/B = \langle a^* \rangle$. Выберем в группе A элемент $a \in a^*$. Тогда смежные классы na^* $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ по подгруппе B будут иметь в качестве представителей элементы na из циклической подгруппы $\langle a \rangle$. Отсюда $A = B \oplus \langle a \rangle$. ∎

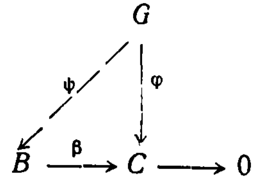
Следующая теорема дает полную информацию о строении подгрупп свободных групп.

Теорема 14.5. *Подгруппа свободной группы сама является свободной группой.*

Пусть $F = \bigoplus_{i\in I} \langle a_i \rangle$ — свободная группа, и пусть множество индексов I некоторым образом вполне упорядочено. Пусть, кроме того, I — это множество порядковых чисел, меньших порядкового числа τ. Для $\sigma \leqslant \tau$ положим $F_\sigma = \bigoplus_{\rho<\sigma} \langle a_\rho \rangle$. Если G — подгруппа группы F, то положим $G_\sigma = G \cap F_\sigma$. Очевидно, $G_\sigma = G_{\sigma+1} \cap F_\sigma$, так что $G_{\sigma+1}/G_\sigma \cong (G_{\sigma+1} + F_\sigma)/F_\sigma$. Последняя факторгруппа является подгруппой группы $F_{\sigma+1}/F_\sigma \cong \langle a_\sigma \rangle$, поэтому или $G_{\sigma+1} = G_\sigma$, или $G_{\sigma+1}/G_\sigma$ — бесконечная циклическая группа. По теореме 14.4 $G_{\sigma+1} = G_\sigma \oplus \langle b_\sigma \rangle$ для некоторого $b_\sigma \in G_{\sigma+1}$ [если $G_{\sigma+1} = G_\sigma$, то $b_\sigma = 0$]. Отсюда следует, что элементы b_σ порождают прямую сумму $\oplus \langle b_\sigma \rangle$. Она должна совпадать с группой G, так как G — объединение подгрупп G_σ. ∎

Существует понятие, тесно связанное со свободой, которое в случае абелевых групп эквивалентно ей [но для произвольных модулей это уже не так].

Назовем группу G *проективной*, если каждая диаграмма



с точной строкой может быть дополнена до коммутативной некоторым гомоморфизмом ψ: $G \to B$. Так как здесь группу C можно отождествить с факторгруппой группы B, то проективность группы G можно выразить иначе так: всякий гомоморфизм группы G в факторгруппу произвольной группы B можно провести через B. Имеет место

Теорема 14.6 (Маклейн [1]). *Группа проективна тогда и только тогда, когда она — свободная группа.*

Пусть β: $B \to C$ — эпиморфизм, F — свободная группа, φ: $F \to C$. Для всякого x_i из системы свободных образующих $\{x_i\}_{i \in I}$ группы F выберем такой элемент $b_i \in B$, что $\beta b_i = \varphi x_i$; это возможно, так как β — эпиморфизм. В силу теоремы 14.2 соответствие $x_i \mapsto b_i$ $(i \in I)$ можно продолжить до гомоморфизма $\psi : F \to B$. Для него выполнено равенство $\beta\psi = \varphi$. Следовательно, группа F проективна.

Пусть G — проективная группа и β:$F \to G$ — эпиморфное отображение свободной группы F на G. Тогда существует такой гомоморфизм ψ: $G \to F$, что $\beta\psi = 1_G$. Следовательно, ψ — мономорфное отображение на прямое слагаемое группы F, т. е. группа G изоморфна прямому слагаемому группы F. По теореме 14.5 G — свободная группа. ■

В силу следствия 14.3 для всякой группы A существует точная последовательность

$$0 \to H \to F \to A \to 0,$$

где F, а тогда по теореме 14.5 и H, — свободная группа. Эта точная последовательность называется *свободной* или *проективной резольвентой* группы A.

Результаты этого параграфа имеют многочисленные следствия; действительно, мы увидим, что на них часто приходится ссылаться. Эти результаты обобщались в различных направлениях. Для нас будет важен случай модулей над кольцом целых p-адических чисел. Поэтому сформулируем следующую теорему.

Теорема 14.7. *Результаты* 14.1 — 14.6 *останутся справедливыми, если заменить абелевы группы p-адическими модулями.*

В самом деле, проходят те же доказательства [с очевидными изменениями]. ■

Результаты настоящего параграфа позволяют определить группу в терминах образующих и определяющих соотношений. Хотя этот

метод хорошо известен из общей теории групп, мы немного поговорим о нем здесь.

Пусть A — группа с системой образующих $\{a_i\}_{i\in I}$, и пусть η: $F \to A$ — эпиморфное отображение свободной группы $F = \bigoplus_{i\in I} \langle x_i \rangle$ на группу A, где $\eta x_i = a_i$. Очевидно, $\operatorname{Ker}\eta$ состоит из всех элементов $m_1x_{i_1} + \ldots + m_kx_{i_k} \in F\,(m_i \in \mathbf{Z})$, для которых $m_1a_{i_1} + \ldots \ldots + m_ka_{i_k} = 0$ в группе A. [Равенства такого типа называются *определяющими соотношениями* относительно системы образующих $\{a_i\}_{i\in I}$ группы A.] Ввиду этого группу A можно определить так:

$$A = \langle a_i \ (i \in I);\ m_{j1}a_{i_1} + \ldots + m_{jk}a_{i_k} = 0 \ (j \in J)\rangle, \tag{2}$$

причем под такой записью понимается, что $A = F/H$, где F — свободная группа, порожденная свободными образующими x_i $(i \in I)$, а H — подгруппа группы F, порожденная элементами $m_{j1}x_{i_1} + \ldots + m_{jk}x_{i_k}$ из F $(j \in J)$, соответствующими левым частям определяющих соотношений. Это определение является стандартным. Выражение (2) называется *представлением* группы A в виде факторгруппы свободной группы [но нужно помнить, что одна и та же группа в виде факторгруппы свободной группы может быть представлена многими способами].

Учитывая то, что по теореме 14.5 подгруппа H есть свободная группа, можно написать $H = \bigoplus_{k\in K} \langle y_k \rangle$, где каждый элемент y_k имеет вид

$$y_k = \sum_{i\in I} n_{ki}x_i \quad (n_{ki} \in \mathbf{Z},\ k \in K),$$

причем при фиксированном k почти все коэффициенты n_{ki} равны нулю. Таким образом, представление $A = F/H$ определяет конечнострочную матрицу

$$\|n_{ki}\|_{k\in K,\, i\in I} \qquad (n_{ki} \in \mathbf{Z}) \tag{3}$$

с независимыми строками. Обратно, всякой конечнострочной матрице с независимыми строками очевидным образом соответствует группа A. Так как группа может быть представлена в виде факторгруппы F/H свободной группы F различными способами и так как F и H могут по-разному разлагаться в прямую сумму циклических групп, то различные матрицы вида (3) могут получаться и с помощью изоморфных групп. Одна из основных связанных с этим проблем — установить, когда две матрицы определяют изоморфные группы. Условия для этого найти не трудно, но эти условия не помогают решить вопрос об изоморфизме и пока не имеют практических приложений.

Упражнения

1. Система образующих группы F_m, где m — натуральное число, является системой свободных образующих тогда и только тогда, когда она содержит ровно m элементов.

2. Доказать следующее утверждение, обратное теореме 14.4: если F — такая группа, что из $B \subseteq A$ и $A/B \cong F$ вытекает, что B — прямое слагаемое группы A, то F — свободная группа.

3 (Кертес [2]). Группа F является свободной, если она изоморфна подгруппе любой группы G, для которой существует эпиморфизм $G \to F$.

4 (Капланский [2]). (а) Пусть F — свободная группа, G — ее подгруппа, H — ее прямое слагаемое. Тогда $G \cap H$ — прямое слагаемое группы G. [*Указание*: $G/(G \cap H)$ — свободная группа.]

(б) Пересечение конечного числа прямых слагаемых свободной группы само является прямым слагаемым.

5. Если F — свободная группа и η: $F \to A$ — эпиморфное отображение группы F на конечно порожденную группу A, то существует такое прямое разложение $F = F_1 \oplus F_2$, что F_1 — конечно порожденная группа, а $F_2 \subseteq \operatorname{Ker} \eta$.

6. Если группа A задана системой образующих и определяющих соотношений, а группа B задана подсистемой этой системы образующих и определяющих соотношений, то существует естественный гомоморфизм $B \to A$, при котором образующие группы B переходят в себя, но рассматриваются теперь как элементы группы A.

7. Пусть группа A задана системой образующих и определяющих соотношений, и пусть образующие можно разбить на два класса $\{b_i\}_{i\in I}$ и $\{c_j\}_{j\in J}$ так, что всякое заданное определяющее соотношение содержит или только элементы b_i, или только элементы c_j. Тогда $A = B \oplus C$, где подгруппа B порождается элементами b_i, а подгруппа C — элементами c_j.

8. Для всякой системы образующих группы существует такая система определяющих соотношений относительно этих образующих, что никакое соотношение не может быть отброшено. [*Указание*: использовать теорему 14.5.]

9. Пусть F — свободная группа, G — подгруппа группы F и A — такая группа, что всякий гомоморфизм φ: $G \to A$ может быть продолжен до некоторого гомоморфизма ψ: $F \to A$. Доказать, что тогда то же выполняется для любого эпиморфного образа группы A.

10. Пусть B — подгруппа группы A и η_1: $F_1 \to B$, η_2: $F_2 \to A/B$ — эпиморфизмы, где F_1, F_2 — свободные группы. Тогда существует такой эпиморфизм η: $F_1 \oplus F_2 \to A$, что $\eta \mid F_1 = \eta_1$ и $\eta g + B = \eta_2 g$ для $g \in F_2$.

11. Пусть A_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — произвольные группы. Доказать, что существуют такие свободные группы $F^{(n)}$ и такая последовательность

$$\ldots \longrightarrow F^{(n-1)} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} F^{(n)} \xrightarrow{\alpha_n} F^{(n+1)} \longrightarrow \ldots,$$

что $\alpha_n \alpha_{n-1} = 0$ и $\operatorname{Ker} \alpha_n / \operatorname{Im} \alpha_{n-1} \cong A_n$ для любого n.

12. Провести подробно доказательство теоремы 14.7.

§ 15. Конечно порожденные группы

В дальнейшем будет полезна следующая лемма.

Лемма 15.1. *Пусть A есть p-группа, содержащая элемент g максимального порядка p^k. Тогда $\langle g \rangle$ — прямое слагаемое группы A.*

Предположим, что B есть $\langle g\rangle$-высокая подгруппа группы A. Чтобы доказать, что $A = \langle g\rangle \oplus B$, вспомним лемму 9.9 и покажем, что из $pa = mg + b$ ($a \in A$, $b \in B$, $m \in \mathbf{Z}$) вытекает $p \mid m$. В силу максимальности порядка элемента g имеем $p^{k-1}mg + p^{k-1}b = p^k a = 0$. Поэтому $p^{k-1}mg = 0$ и m должно делиться на p. ∎

Теперь мы можем перейти к первой в истории теории групп собственно структурной теореме.

Теорема 15.2 (Фробениус и Штикельбергер [1]). *Конечная группа является прямой суммой конечного числа циклических групп, имеющих порядки, равные степеням простых чисел.*

В силу теоремы 8.4 мы можем ограничиться рассмотрением p-групп. Если $A \neq 0$ — конечная p-группа, то выбираем элемент $a \in A$ максимального порядка p^k. По предыдущей лемме $A = \langle a\rangle \oplus B$ для некоторой подгруппы B группы A. Так как порядок подгруппы B меньше порядка группы A, то доказательство получается с помощью простой индукции. ∎

Выяснив, как устроены конечные группы, перейдем к конечно порожденным группам. Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 15.3 (Радо [1]). *Если $A = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$ и целые числа $n_1, \ldots, n_k$ удовлетворяют условию $(n_1, \ldots, n_k) = 1$, то в группе A существуют такие элементы $b_1, \ldots, b_k$, что*

$$A = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle, \text{ причем } b_1 = n_1a_1 + \ldots + n_ka_k.$$

Если $n = |n_1| + \ldots + |n_k| = 1$, то $b_1 = \pm a_i$ для некоторого i, и утверждение тривиально. Предположим, что $n > 1$, и применим индукцию по n. Теперь хотя бы два числа n_i отличны от нуля. Пусть $|n_1| \geqslant |n_2| > 0$. Тогда или $|n_1 + n_2| < |n_1|$, или $|n_1 - n_2| < |n_1|$, поэтому $|n_1 \pm n_2| + |n_2| + \ldots + |n_k| < n$ для одного из двух знаков. В силу того, что $(n_1 \pm n_2, n_2, \ldots, n_k) = 1$, и в силу предположения индукции

$$A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle = \langle a_1, a_2 \mp a_1, a_3, \ldots, a_k\rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_k\rangle,$$

где

$$b_1 = (n_1 \pm n_2)a_1 + n_2(a_2 \mp a_1) + n_3a_3 + \ldots + n_ka_k = n_1a_1 + \ldots + n_ka_k. \ ∎$$

Если группа A является прямой суммой циклических групп $\langle a_i\rangle$ ($i \in I$), то будем говорить, что $\{a_i\}_{i\in I}$ — *базис* группы A.

Лемма 15.4. *Пусть $H \neq 0$ — подгруппа свободной группы F ранга n. Тогда существуют такие базисы $a_1, \ldots, a_n$ группы F и $b_1, \ldots, b_n$ группы H, что*

$$b_i = m_ia_i \ (i = 1, \ldots, n),$$

где m_i — неотрицательные целые числа и

$$m_{i-1} \mid m_i \quad (i = 2, \ldots, n).$$

Возьмем сначала базис $c_1, \ldots, c_n$ группы F, обладающий следующим свойством минимальности: в подгруппе H имеется элемент $b_1 = k_1c_1 + \ldots + k_nc_n$ с минимальным положительным коэффициентом k_1, т. е. с таким, что для другого базиса группы F, или для другого упорядочения элементов $c_1, \ldots, c_n$, или для других элементов из подгруппы H первый коэффициент, если он положителен, всегда не меньше k_1. Тогда $k_1 \mid k_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, так как если $k_i = q_ik_1 + r_i$ $(0 \leqslant r_i < k_1)$, то можно написать $b_1 = k_1a_1 + r_2c_2 + \ldots + r_nc_n$, где $a_1 = c_1 + q_2c_2 + \ldots + q_nc_n$, $c_2, \ldots, c_n$ — базис группы F. В силу выбора базиса $c_1, \ldots, c_n$ должно быть $r_2 = \ldots = r_n = 0$. Такие же рассуждения показывают, что если $b = s_1c_1 + \ldots + s_nc_n \in H$, то $s_1 = qk_1$ для некоторого целого числа q. Отсюда $b - qb_1 \in \langle c_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle c_n \rangle$. Мы заключаем, что $F = \langle a_1 \rangle \oplus \langle c_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle c_n \rangle$ и $H = \langle b_1 \rangle \oplus H_1$, где $b_1 = k_1a_1$ и $H_1 \subseteq \langle c_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle c_n \rangle$. Простая индукция по n показывает, что существуют базисы $a_1, \ldots, a_n$ группы F и $b_1, \ldots, b_n$ группы H, для которых $b_i = m_ia_i$.

Чтобы доказать последнее утверждение леммы, покажем, что $m_1 \mid m_2$. Пусть $m_2 = qm_1 + r$ $(0 \leqslant r < m_1)$. Заменим элемент базиса a_1 элементом $a = a_1 + qa_2$. В новом базисе $a, a_2, \ldots, a_n$ элемент $b_1 + b_2 \in H$ имеет вид $b_1 + b_2 = m_1a_1 + (qm_1 + r)\,a_2 = m_1a + ra_2$. В силу минимальности числа $m_1 = k_1$ здесь обязательно $r = 0$. ∎

Основным результатом, касающимся конечно порожденных групп, является следующая замечательная теорема.

Теорема 15.5. *Для группы A эквивалентны следующие условия:*

1) *A — конечно порожденная группа;*
2) *A — прямая сумма конечного числа циклических групп;*
3) *в группе A выполнено условие максимальности для подгрупп.*

Из условия 1) вытекает условие 2). Так как это основная часть теоремы, мы дадим для этой импликации два независимых доказательства. Первое из них основывается на лемме 15.3. Предположим, что A — конечно порожденная группа и что каждая ее система образующих содержит не менее k элементов. Выберем систему из k образующих $a_1, \ldots, a_k$, в которой, например, элемент a_1 имеет наименьший возможный порядок в том смысле, что никакая другая система из k образующих группы A не содержит элемента меньшего порядка. В силу выбора числа k имеем $o(a_1) > 1$. Можно сделать индуктивное предположение, что $B = \langle a_2, \ldots, a_k \rangle$ — прямая сумма циклических групп. Следовательно, достаточно показать, что $A = \langle a_1 \rangle \oplus B$, а это сразу получится, если мы покажем, что $\langle a_1 \rangle \cap B = 0$. Предположим, что $m_1a_1 = m_2a_2 + \ldots + m_ka_k \neq 0$, $0 < m_1 < o(a_1)$. Положим $(m_1, \ldots, m_k) = m$, и пусть $m_i = mn_i$. Тогда $(n_1, \ldots, n_k) = 1$, и из леммы 15.3 получается, что $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle$, где

$b_1 = -n_1a_1 + n_2a_2 + \ldots + n_ka_k$. Здесь $mb_1 = 0$, т. е. $o(b_1) < o(a_1)$, а это противоречит выбору элемента a_1.

Во втором доказательстве используется лемма 15.4. Если группа A порождается n элементами, то по следствию 14.3 $A \cong F/H$, где F — свободная группа ранга n. Если выбрать в F и в H базисы так, как это сделано в лемме 15.4, то получится, что

$$A \cong \langle a_1\rangle/\langle m_1a_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_n\rangle/\langle m_na_n\rangle.$$

Таким образом, A — прямая сумма циклических групп. Если здесь $m_i = 0$, то i-е прямое слагаемое — бесконечная циклическая группа, в противном случае оно — циклическая группа порядка m_i.

Из условия 2) вытекает условие 3). Пусть $A = \langle a_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_n\rangle$. Если $n = 1$, то A — циклическая группа и всякая ее ненулевая подгруппа имеет конечный индекс. Таким образом, условие максимальности для подгрупп выполнено. Сделаем теперь индуктивное предположение, что условие максимальности для подгрупп выполнено в группе $B = \langle a_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_{n-1}\rangle$. Если $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ — возрастающая последовательность подгрупп группы A, то $B \cap C_1 \subseteq B \cap C_2 \subseteq \ldots$ — возрастающая последовательность подгрупп группы B. Таким образом, начиная с некоторого индекса k, все пересечения $B \cap C_m$ совпадают [с пересечением $B \cap C_k$]. Для $m > k$

$$C_m/(B \cap C_k) = C_m/(B_k \cap C_m) \cong (B + C_m)/B \subseteq A/B,$$

где $A/B \cong \langle a_n\rangle$ — циклическая группа. Следовательно, в возрастающей последовательности $C_k/(B \cap C_k) \subseteq C_{k+1}/(B \cap C_k) \subseteq \ldots$, начиная с некоторого индекса $k + l$, все группы совпадают между собой, откуда $C_{k+l} = C_{k+l+1} = \ldots$.

Наконец, из условия 3) вытекает 1). Пусть в группе A выполнено условие максимальности для подгрупп. Множество всех конечно порожденных подгрупп группы A не пусто, поэтому в A существует максимальная конечно порожденная подгруппа G. Для любого элемента $a \in A$ подгруппа $\langle G, a\rangle$ также является конечно порожденной. Следовательно, $G = \langle G, a\rangle$ и $G = A$. ∎

Заметим, что из теоремы 15.5 вытекает следующий факт: *подгруппы конечно порожденных групп сами являются конечно порожденными.*

Естественно поставить вопрос о единственности разложения конечно порожденной группы в прямую сумму циклических групп. Если порядок конечной циклической группы делится хотя бы на два различных простых числа, то ее можно разложить в прямую сумму групп, порядки которых — степени простых чисел, поэтому, желая получить в каком-то виде теорему единственности, мы должны будем ограничиться рассмотрением разложений в прямые суммы циклических групп, порядки которых бесконечны или являются степенями простых чисел. Тогда единственность [с точностью до изоморфизма] будет простым следствием следующей теоремы, дающей описание подгрупп конечно порожденной группы.

Теорема 15.6. *Пусть B — подгруппа конечно порожденной группы A. Тогда*

1) *число s бесконечных циклических групп в разложении подгруппы B в прямую сумму циклических групп не больше числа r бесконечных циклических групп в разложении группы A;*

2) *если $p^{r_1} \geqslant \ldots \geqslant p^{r_k} > 1$ — порядки циклических p-групп [p фиксировано] в разложении группы A в прямую сумму циклических групп бесконечного порядка и порядков, равных степеням простых чисел, а $p^{s_1} \geqslant \ldots \geqslant p^{s_m} > 1$ — аналогичные числа для подгруппы B, то $k \geqslant m$ и $r_i \geqslant s_i$, $i = 1, \ldots, m$;*

3) *если C — прямая сумма циклических групп, порядки которых удовлетворяют условиям 1) и 2), то группа C изоморфна подгруппе группы A.*

Из равенства $T(B) = B \cap T(A)$ следует, что $B/T(B) \cong (B + T(A))/T(A) \subseteq A/T(A)$. Группы $B/T(B)$ и $A/T(A)$ — прямые суммы s и r бесконечных циклических групп соответственно. Поэтому для доказательства утверждения 1) достаточно рассмотреть случай, когда A — группа без кручения. В этом случае A и B — свободные группы соответственно рангов r и s. По лемме 15.4 группа B имеет базис, состоящий не более, чем из стольких элементов, сколько их в некотором базисе группы A. Отсюда и из предложения 14.1 получаем $s \leqslant r$.

Чтобы доказать утверждение 2), заметим сначала, что $|A[p]| = p^k$, а $|B[p]| = p^m$, откуда, очевидно, $k \geqslant m$. Предположим теперь, что $r_1 \geqslant s_1, \ldots, r_{i-1} \geqslant s_{i-1}$, но $r_i < s_i$ для некоторого i. Тогда p-компонента группы $p^{r_i}A$ — прямая сумма циклических групп порядков $p^{r_1-r_i}, \ldots, p^{r_{i-1}-r_i}$, а p-компонента группы $p^{r_i}B$ — прямая сумма циклических групп порядков $p^{s_1-r_i}, \ldots, p^{s_i-r_i}, \ldots$, откуда $|(p^{r_i}A)[p]| = p^{i-1} < p^i \leqslant |(p^{r_i}B)[p]|$, чего не может быть.

Утверждение 3) очевидно. ∎

При $B = A$ теорема 15.6 дает единственность порядков циклических групп в разложениях группы A в прямые суммы циклических групп бесконечного порядка и порядков, равных степеням простых чисел. [Но нужно подчеркнуть, что эти циклические группы не являются однозначно определенными подмножествами группы A.] Эти порядки называются *инвариантами* группы A. Например, инвариантами группы $A = Z \oplus Z \oplus Z(p) \oplus Z(p^2) \oplus Z(q^2)$ служат $\infty, \infty, p, p^2, q^2$. В этом случае мы будем также говорить, что A — *группа типа* $(\infty, \infty, p, p^2, q^2)$.

Таким образом, каждой конечно порожденной группе A мы сопоставили конечную систему, состоящую из символов ∞ и степеней простых чисел, — систему инвариантов группы A. При этом не только инварианты однозначно определяются группой, но и, наоборот, они определяют группу, т. е. две конечно порожденные группы обязательно изо-

морфны, если эти группы обладают одной и той же системой инвариантов. Этот факт обычно выражают, говоря, что имеется *полная система инвариантов*. Кроме того, указанные инварианты *независимы* в том смысле, что для всякой конечной системы символов ∞ и степеней простых чисел существует конечно порожденная группа, система инвариантов которой совпадает с заданной системой.

Описание класса групп посредством инвариантов — это одна из основных целей теории групп. В большинстве случаев инварианты являются натуральными, кардинальными или порядковыми числами, но они могут быть и матрицами определенного характера и т. д. Инварианты должны быть легко описываемыми величинами и, как показывает их название, должны однозначно определяться группами; они достаточно хороши, если по инвариантам легко установить, изоморфны ли группы. Системы инвариантов для конечно порожденных групп являются наиболее хорошими, и они послужили классической моделью для структурных теорем в алгебре.

Точнее, структурная теорема для класса алгебраических систем состоит в нахождении полной [и, может быть, независимой] системы инвариантов и метода построения исходной алгебраической системы по ее инвариантам. В случае конечно порожденных групп этот метод состоит в том, что строится прямая сумма циклических групп, порядки которых — заданные инварианты.

Теорема 15.5 допускает различные обобщения на случай модулей. Для наших целей достаточно будет рассмотреть модули над кольцом целых p-адических чисел.

Теорема 15.7. *Для модулей над кольцом целых p-адических чисел справедливы утверждения* 15.3 — 15.6.

На этот случай непосредственно переносятся доказательства, приведенные выше. ∎

Упражнения

1. (а) Группа конечна, если она имеет лишь конечное число подгрупп.

(б) Группа конечна, если в ней выполнены условие максимальности и условие минимальности для подгрупп.

2. Конечная группа A является циклической тогда и только тогда, когда $|A[p]| \leqslant p$ для любого простого числа p.

3. Число неизоморфных групп порядка $m = p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ равно $P(r_1) \ldots P(r_k)$, где $P(r)$ — количество способов разложения числа r в сумму положительных слагаемых.

4. Пусть $C(m)$ — мультипликативная группа классов вычетов чисел, взаимно простых с $m = p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$, по модулю m.

(а) $C(m)$ является прямым произведением групп $C(p_i^{r_i})$, $i = 1, \ldots, k$;

(б) $C(p^k)$ — циклическая группа, если p — нечетное простое число;

(в) $C(4)$ — циклическая группа, а $C(2^n)$ при $n \geqslant 3$ имеет тип $(2, 2^{n-2})$;

(г) всякая конечная группа изоморфна подгруппе некоторой группы $C(m)$.

5. Если число m делит порядок группы A, то группа A имеет подгруппы и факторгруппы порядка m.

6. Доказать утверждение 1) теоремы 15.6 для случая, когда B — не подгруппа, а факторгруппа группы A. Верно ли для факторгрупп утверждение 2)?

7. Если A, B — такие конечные группы, что для любого целого числа m они содержат одинаковое число элементов порядка m, то $A \cong B$.

8. Для любых конечных групп A, B существует такая группа C, что A и B имеют прямые слагаемые, изоморфные группе C, и всякая группа, изоморфная одновременно прямым слагаемым групп A и B, изоморфна прямому слагаемому группы C.

9. Пусть группа A имеет инварианты $p^k, \ldots, p^k$ (n раз). Подгруппа B группы A служит для A прямым слагаемым тогда и только тогда, когда каждый инвариант группы B равен p^k.

10 (Селе [1]). Пусть B — подгруппа конечной p-группы A. Подгруппа B служит для A прямым слагаемым тогда и только тогда, когда существуют такие прямые разложения $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$, что $B_i \subseteq A_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ и каждый инвариант групп A_i и B_i равен p^i.

11. Система образующих $a_1, \ldots, a_k$ конечной группы A служит базисом для A тогда и только тогда, когда произведение $o(a_1) \ldots$ $\ldots o(a_k)$ принимает минимальное значение [которое должно быть равно $|A|$].

12. Установить существование базиса $g_1, \ldots, g_r$ конечной группы A, удовлетворяющего условиям делимости $o(g_1) \mid o(g_2) \mid \ldots$ $\ldots \mid o(g_r)$, и доказать, что во всех таких базисах группы A порядки $o(g_1), \ldots, o(g_r)$ одинаковы.

13 (Биркгоф [1]). Пусть $A = \langle a_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_n \rangle$, где $o(a_i) = p^{r_i}$, $r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_n$. Назовем элементы $b = s_1a_1 + \ldots + s_na_n$ и $c = t_1a_1 + \ldots + t_na_n$ ортогональными, если

$$\sum_i s_it_ip^{r_1-r_i} \equiv 0 \mod p^{r_1}.$$

Показать, что элементы группы A, ортогональные ко всем элементам подгруппы B, образуют такую подгруппу C, что $|B| \cdot |C| = |A|$.

14. (а) Подгруппы и факторгруппы элементарных групп сами являются элементарными группами.

(б) Элементарная группа E порядка p^r содержит

$$(p^r - 1)(p^{r-1} - 1) \ldots (p^{r-t+1} - 1)/(p-1)(p^2-1) \ldots (p^t - 1)$$

подгрупп порядка p^t $(t \leqslant r)$.

(в) В E имеется $(p^r-1)(p^{r-1}-1) \ldots (p-1)/(p-1)^r$ композиционных рядов.

(г) Найти число различных базисов группы E.

15. (Фробениус). В конечной p-группе A число подгрупп фиксированного порядка [делящего $|A|$] сравнимо с 1 по модулю p.

16. (а) Сумма всех элементов конечной группы A равна нулю, за исключением случая, когда в A содержится ровно один элемент a порядка 2 [тогда сумма элементов равна a].

(б) Вывести из (а) сравнение Вильсона $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$.

17. Для конечно порожденной группы A, имеющей инварианты $\infty, \ldots, p^k, \ldots, q^l$, определить минимальное число элементов в системе образующих группы A.

18 (Капланский [2]). Если A — бесконечная группа, все ненулевые подгруппы которой изоморфны A, то $A \cong Z$.

19 (Федоров [1]). Бесконечная группа является циклической тогда и только тогда, когда все ее ненулевые подгруппы имеют конечный индекс.

20. Если в A/B и в B выполнено условие максимальности для подгрупп, то оно выполнено и в группе A.

21. Любая система образующих конечно порожденной группы содержит конечную систему образующих.

22. Если $F = \langle x_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x_n \rangle$ — свободная группа ранга n и $G = \langle y_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle y_n \rangle$ — ее подгруппа того же ранга, в которой

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, n),$$

то порядок факторгруппы F/G равен абсолютной величине определителя матрицы $\| r_{ij} \|$.

23. Мощность множества попарно не изоморфных конечно порожденных [конечных] групп счетна.

24 (Кон [1], Хонда [2], Уокер Э. [1]). Пусть $A = B \oplus G = C \oplus H$, где B, C — изоморфные между собой конечно порожденные группы. Тогда $G \cong H$. [*Указание*: предположим, что $G \neq H$; если $B \cong Z$, то $G = Z \oplus (G \cap H)$; если группа $B = \langle b \rangle$ имеет порядок p^k и $p^{k-1}b \notin H$, то $A = B \oplus H$, а если $p^{k-1}b \in H$, $C = \langle c \rangle$ и $p^{k-1}c \in G$, то $A = \langle b + c \rangle \oplus G = \langle b + c \rangle \oplus H$.]

25 (Уокер Э. [1]). Доказать изоморфизм прямых разложений конечно порожденной группы, пользуясь упражнением 24.

26. (а) Если A, B — конечно порожденные группы, каждая из которых изоморфна подгруппе другой, то $A \cong B$.

(б) То же с заменой слова «подгруппа» словом «факторгруппа».

§ 16. Линейная независимость и ранг

Если нужно выбрать базис в прямой сумме циклических групп, удобно иметь в распоряжении понятие линейной независимости. В абелевых группах это понятие может быть определено двумя неэквивалентными способами. Здесь мы примем способ, дающий нетривиальный результат для периодических групп и потому более полезный для наших целей [см. Селе [2]].

Система $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ненулевых элементов группы A называется *линейно независимой* или просто *независимой*, если из равенства

$$n_1a_1 + \ldots + n_ka_k = 0 \quad (n_i \in \mathbf{Z}) \tag{1}$$

всегда вытекает, что

$$n_1a_1 = \ldots = n_ka_k = 0.$$

Точнее, это означает, что $n_i = 0$, если $o(a_i) = \infty$, и $o(a_i) \mid n_i$, если порядок $o(a_i)$ элемента a_i конечен. Система элементов называется *зависимой*, если она не независима. [Заметим, что (в отличие от векторных пространств) в общем случае не верно, что один из элементов зависимой системы можно представить в виде линейной комбинации остальных элементов.]

Бесконечная система $L = \{a_i\}_{i \in I}$ элементов группы A называется *независимой*, если в L всякая конечная подсистема независима. Таким образом, независимость по определению является свойством конечного характера. Независимая система не может содержать равных элементов, поэтому она является множеством.

Лемма 16.1. *Система $L = \{a_i\}_{i \in I}$ независима тогда и только тогда, когда подгруппа, ею порожденная, является прямой суммой циклических групп $\langle a_i \rangle$, $i \in I$.*

Если система L независима, то для любого $i \in I$ пересечение подгруппы $\langle a_i \rangle$ с подгруппой, порожденной всеми элементами a_j из L, где $j \neq i$, обязательно равно нулю. Следовательно, $\langle L \rangle$ — прямая сумма групп $\langle a_i \rangle$, $i \in I$. Обратно, если $\langle L \rangle = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$, то 0 можно записать в виде $n_1a_{i_1} + \ldots + n_ka_{i_k} = 0$, где $i_1, \ldots, i_k$ — различные элементы из I, лишь тривиальным образом: $n_1a_{i_1} = \ldots = n_ka_{i_k} = 0$. Но это означает, что система L независима. ∎

Говорят, что элемент $g \in A$ *зависит* от подмножества L группы A, если существует *отношение зависимости*

$$0 \neq ng = n_1a_1 + \ldots + n_ka_k, \tag{2}$$

где $a_i \in L$, n, n_i — целые числа. Подмножество K группы A называется *зависящим* от L, если каждый элемент $g \in K$ зависит от L. Если K зависит от L и L зависит от K, то подмножества K и L называются *эквивалентными*.

Независимая система M элементов группы A называется *максимальной*, если в A не существует независимой системы, строго содержащей M. Таким образом, если $g \in A$, $g \neq 0$, то $\{M, g\}$ — уже не независимая система, и g зависит от M. Ясно, что любые две максимальные независимые системы элементов группы A эквивалентны. По лемме Цорна *всякую независимую систему элементов группы A можно расширить до максимальной*. Более того, если исходная независимая система содержала только элементы бесконечного порядка и порядков, равных степеням простых чисел, то это же свойство мож-

но предполагать выполненным в максимальной независимой системе. В самом деле, в независимой системе всякий элемент a конечного порядка можно заменить, не нарушая независимости системы, произвольным кратным $ma \neq 0$, в частности таким, порядок которого — степень простого числа.

Подгруппа E группы A называется *существенной*, если $E \cap B \neq 0$ для любой ненулевой подгруппы B группы A. [Очевидно, достаточно, чтобы это выполнялось для циклических подгрупп B.] В этом случае говорят, что группа A есть *существенное расширение* группы E. Например, существенной подгруппой периодической группы является ее цоколь. Имеет место следующий простой результат.

Лемма 16.2. *Независимая система M элементов группы A максимальна тогда и только тогда, когда $\langle M \rangle$ — существенная подгруппа группы A. Всякая максимальная независимая система элементов существенной подгруппы группы A является максимальной независимой системой и в A.*

Так как элемент $g \in A$ зависит от M тогда и только тогда, когда $\langle M \rangle \cap \langle g \rangle \neq 0$, то первая часть леммы очевидна. Если E — существенная подгруппа группы A и M — максимальная независимая система в E, то возьмем произвольный элемент $g \in A$, $g \neq 0$. Существует ненулевой элемент $h \in E \cap \langle g \rangle$, $h = mg$. Так как h зависит от M, то и g зависит. ∎

Рангом $r(A)$ группы A называется мощность ее максимальной независимой системы, содержащей только элементы бесконечного порядка или порядка, равного степени простого числа. Если мы ограничимся элементами бесконечного порядка группы A, т. е. выберем независимую систему, состоящую только из элементов бесконечного порядка и максимальную по отношению к этому свойству, то мощность такой системы будет называться *рангом без кручения* $r_0(A)$ группы A. Аналогично определяется *p-ранг* $r_p(A)$ группы A: вместо элементов бесконечного порядка используются элементы, порядки которых являются степенями фиксированного простого числа p. Из этих определений ясно, что для всякой группы A справедливо следующее равенство:

$$r(A) = r_0(A) + \sum_p r_p(A), \tag{3}$$

где p пробегает все простые числа. Очевидно, условие $r(A) = 0$ равносильно тому, что $A = 0$.

Основная теорема о рангах формулируется следующим образом.

Теорема 16.3. *Ранги $r(A)$, $r_0(A)$, $r_p(A)$ группы A являются инвариантами этой группы.*

В силу формулы (3) достаточно проверить инвариантность $r_0(A)$ и $r_p(A)$.

Доказательство инвариантности ранга без кручения r_0 сведется к рассмотрению случая групп без кручения, если мы покажем, что $r_0(A) = r(A/T)$, где T — периодическая часть группы A. Если элементы $a_1, \ldots, a_k \in A$ независимы и имеют бесконечный порядок, а для смежных классов $a_i^* = a_i + T$ выполнено равенство $n_1a_1^* + \ldots + n_ka_k^* = 0^*$, то $n_1a_1 + \ldots + n_ka_k = b \in T$. Умножение на $m = o(b)$ дает $mn_1a_1 + \ldots + mn_ka_k = 0$, откуда $mn_i = 0$, $n_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, $\{a_1^*, \ldots, a_k^*\}$ — независимая система элементов группы A/T. Обратно, если $a_1^*, \ldots, a_k^*$ — независимая система элементов группы A/T, то из соотношения $n_1a_1 + \ldots + n_ka_k = 0$ получаем $n_1a_1^* + \ldots + n_ka_k^* = 0$, откуда $n_i = 0$ для каждого i. Этим доказано, что $r_0(A) = r(A/T)$, что и требовалось.

Чтобы доказать инвариантность ранга $r(A)$ для группы без кручения A, выберем в A максимальную независимую систему $L = \{a_i\}_{i \in I}$. Для $g \in A$, $g \neq 0$, имеет место равенство $ng = n_1a_{i_1} + \ldots + n_ka_{i_k} \neq 0$. Если связать с элементом g систему $\{i_1, \ldots, i_k; n, n_1, \ldots, n_k\}$, состоящую из конечного числа индексов и целых чисел, отличных от нуля, то никакой другой элемент $g' \in A$ не будет связан с той же системой, так как если элементы g и g' определяют одну и ту же систему, то $n(g' - g) = 0$ и $g' = g$. Следовательно, мощность A не превышает мощности множества всех систем $\{i_1, \ldots, i_k; n, n_1, \ldots, n_k\}$, откуда $|A| \leqslant |I| \aleph_0 = r(A) \cdot \aleph_0$. Так как, очевидно, $r(A) \leqslant |A|$, то отсюда получаем, что $r(A) = |A|$, если ранг $r(A)$ бесконечен. Если группа A обладает конечной максимальной независимой системой $\{a_1, \ldots, a_k\}$ и $\{b_1, \ldots, b_l\}$ — какая-то независимая система элементов группы A, то вторая система зависит от первой. Следовательно, для некоторого целого числа $m > 0$ имеем $mb_i \in \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$, $i = 1, \ldots, l$. Таким образом, $\langle mb_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle mb_l \rangle$ — подгруппа группы $\langle a_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_k \rangle$, и по теореме 15.6 справедливо неравенство $l \leqslant k$. Мы заключаем, что всякая независимая система в группе A содержит не более k элементов, и поэтому всякая максимальная независимая система состоит из k элементов. Таким образом, ранг без кручения $r_0(A)$ — инвариант для любой группы A.

Обратимся к рангам $r_p(A)$. Ясно, что $r_p(A) = r(T_p)$, где T_p есть p-компонента группы A. Следовательно, нам нужно только доказать инвариантность ранга $r(A)$ для p-группы A.

Если A есть p-группа и $S(A) = A[p]$ — ее цоколь, то $r(A) = r(S(A))$. В самом деле, система элементов $\{a_1, \ldots, a_k\}$ группы A независима тогда и только тогда, когда независима система $\{p^{m_1-1}a_1, \ldots, p^{m_k-1}a_k\}$, где $m_i = e(a_i)$. Поэтому нужно установить только однозначную определенность $r(S(A))$. Так как $S(A)$ естественным образом является векторным пространством над полем $\mathbf{F}_p$ из p элементов и независимость в нашем смысле совпадает с независимостью в векторном пространстве, то получается, что $r(S(A))$ — это в точности размерность векторного пространства $S(A)$, а она определяется однозначно.

Из последней части доказательства мы в силу леммы 16.1 получаем

Следствие 16.4. *В элементарной p-группе всякая максимальная независимая система служит базисом.* ∎

Ясно, как определить независимость и ранг для модулей над кольцом целых p-адических чисел. Заметим, что в этом случае q-ранги для простых чисел $q \neq p$ тривиальны, так что можно ограничиться рассмотрением рангов без кручения и p-рангов для одного p. Как и в теореме 16.3, получается, что это инварианты модуля.

Упражнения

1. Подгруппы B_i $(i \in I)$ группы A порождают в A подгруппу, являющуюся их прямой суммой, тогда и только тогда, когда независимо каждое множество $L = \{b_i\}_{i\in I}$, где b_i $(\neq 0)$ — элемент подгруппы B_i.

2. Если K — независимая, а L — максимальная независимая система элементов группы A, причем L содержит только элементы бесконечного порядка или порядка, равного степени простого числа, то в группе A существует максимальная независимая система элементов, содержащая K и содержащаяся в $K \cup L$.

3. Пусть B — подгруппа группы A. Показать, что
(а) $r(B) \leqslant r(A)$;
(б) $r(A) \leqslant r(B) + r(A/B)$;
(в) возможен случай, когда $r(A) < r(A/B)$;
(г) $r_0(A) = r_0(B) + r_0(A/B)$.

4. Если $B_i\,(i \in I)$ — такие подгруппы группы A, что $A = \sum_{i\in I} B_i$, то $r(A) \leqslant \sum_i r(B_i)$, причем если сумма прямая, то имеет место равенство.

5. Группа A является локально циклической тогда и только тогда, когда $r_0(A) + \max_p r_p(A) \leqslant 1$.

6. (а) Группа A не содержит подгрупп, разложимых в прямую сумму двух их собственных подгрупп, тогда и только тогда, когда $r(A) \leqslant 1$.

(б) $r(A) \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда группа A изоморфна подгруппе группы Q или подгруппе некоторой группы $Z(p^\infty)$.

7. Если $B_1, \ldots, B_n$ — такие подгруппы группы A, что факторгруппы A/B_i имеют конечные ранги, то факторгруппа $A/(B_1 \cap \ldots \cap B_n)$ также имеет конечный ранг.

8. Группа бесконечного ранга $\mathfrak{m}$ содержит в точности $2^{\mathfrak{m}}$ различных подгрупп.

9. Если E — существенная подгруппа группы A и $B \subseteq A$, то $E \cap B$ — существенная подгруппа группы B.

10. Подгруппа B группы A является существенной тогда и только тогда, когда $S(A) \subseteq B$ и A/B — периодическая группа.

11. Существенные подгруппы группы A образуют в структуре $\mathbf{L}(A)$ дуальный идеал. Он является главным тогда и только тогда, когда A — периодическая группа.

12. Для всякой подгруппы B группы A существует максимальная подгруппа группы A, являющаяся существенным расширением подгруппы B.

13. (а) Ранг p-группы, рассматриваемой как $\mathbf{Z}$-модуль, совпадает с рангом этой же группы, рассматриваемой как $\mathbf{Q}_p^*$-модуль.

(б) Группа J_p, рассматриваемая как абелева группа, имеет ранг $2^{\aleph_0}$, а рассматриваемая как $\mathbf{Q}_p^*$-модуль, имеет ранг 1.

§ 17. Прямые суммы циклических p-групп

Пусть A — прямая сумма циклических p-групп. Тогда, очевидно, группа A не содержит ненулевых элементов бесконечной высоты. Ниже мы на примере увидим, что отсутствие элементов бесконечной высоты еще не означает, что p-группа является прямой суммой циклических групп. Важно иметь критерии, позволяющие установить, когда заданная p-группа разложима в прямую сумму циклических групп.

Теорема 17.1 (Куликов [1]). *p-группа A является прямой суммой циклических групп тогда и только тогда, когда A есть объединение возрастающей последовательности подгрупп*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A, \tag{1}$$

где высоты отличных от нуля элементов, входящих в A_n, меньше фиксированного числа k_n.

Если A — прямая сумма циклических групп, то для каждого n соберем в ее разложении циклические прямые слагаемые одного и того же порядка p^n и обозначим их прямую сумму через B_n. Очевидно, подгруппы $A_n = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ будут удовлетворять условию теоремы при $k_n = n$.

Для доказательства достаточности предположим, что подгруппы A_n группы A удовлетворяют нужным условиям. Так как мы можем добавить 0 в начале цепи (1) и так как можно повторять одно и то же A_n конечное число раз, то, очевидно, без ограничения общности можно предположить, что $k_n = n$, т. е. что $A_n \cap p^nA = 0$ для каждого n. Рассмотрим все цепи

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subseteq \ldots$$

подгрупп C_n группы A, для которых

$$1)\ A_n \subseteq C_n \quad \text{и} \quad 2)\ C_n \quad p^nA = 0$$

при всех n. Будем говорить, что цепь подгрупп C_n меньше или равна цепи подгрупп B_n, если $C_n \subseteq B_n$ для любого n. Тогда множество всех цепей со свойствами 1) и 2) окажется индуктивным, и из леммы Цорна

будет следовать, что существует цепь $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_n \subseteq \ldots$ со свойствами 1), 2) [где C_n заменено на G_n], максимальная в рассматриваемом сейчас смысле. Очевидно, $\bigcup G_n = A$.

Выберем для каждого n максимальную независимую систему L_n элементов подгруппы $G_n[p] \cap p^{n-1}A$ и обозначим через L объединение всех множеств L_n ($n = 1, 2, \ldots$). Для любого $c_i \in L$ и $m_i = h(c_i)$ выберем такой элемент $a_i \in A$, что $p^{m_i}a_i = c_i$. Мы утверждаем, что подгруппа $A' = \langle \ldots, a_i, \ldots \rangle = \oplus \langle a_i \rangle$ совпадает с A.

Во-первых, покажем, что $\langle L \rangle = A[p]$. В силу следствия 16.4 $\langle L_n \rangle = G_n[p] \cap p^{n-1}A$. Так как все отличные от нуля элементы из $\langle L_n \rangle$ имеют высоту $n-1$, то подгруппы $\langle L_n \rangle$ порождают подгруппу, являющуюся их прямой суммой, т. е. $\langle L \rangle = \bigoplus\limits_n \langle L_n \rangle$. Предположим, что каждый элемент $a \in A[p]$, лежащий в G_r, принадлежит $\langle L \rangle$ [для $r = 1$ это, очевидно, выполнено], и пусть $b \in G_{r+1}[p] \setminus G_r$. Из $b \notin G_r$ следует, что $\langle G_r, b \rangle \cap p^rA \neq 0$. Пусть $0 \neq g + kb = c \in p^rA$, где $g \in G_r$. Можно считать, что $k = 1$ [так как иначе мы можем умножить взятый элемент на k', где $kk' \equiv 1 \mod p$]. Здесь $c \in G_{r+1}$ и $h(c) \geqslant r$; поэтому в силу условия 2) $o(c) = p$ и $h(c) = r$. Отсюда $c \in \langle L_{r+1} \rangle$. Далее, из равенства $pg = pc - pb = 0$, включения $g \in G_r$ и индуктивного предположения получаем, что $g \in \langle L \rangle$, откуда $b = c - g \in \langle L \rangle$ и $\langle L \rangle = A[p]$.

Предположим, что уже доказано, что всякий элемент $a \in A$ порядка $\leqslant p^n$ принадлежит A', и пусть элемент $b \in A$ имеет порядок p^{n+1}, где $n \geqslant 1$. Как показано в предыдущем абзаце, $p^nb \in \langle L \rangle$ и, следовательно, $p^nb = m_1c_1 + \ldots + m_kc_k$ для некоторых $c_i \in L$. Пусть элементы $c_1, \ldots, c_j$ имеют высоту $\geqslant n$, а элементы $c_{j+1}, \ldots, c_k$ — высоту $\leqslant n-1$. Если записать $m_ic_i = p^nm_i'a_i$ для $i = 1, \ldots, j$, то получится

$$p^n(b - m_1'a_1 - \ldots - m_j'a_j) = m_{j+1}c_{j+1} + \ldots + m_kc_k \in G_{n-1}.$$

Из условия 2) следует, что элемент $b - m_1'a_1 - \ldots - m_j'a_j$ имеет порядок $\leqslant p^n$, т. е. лежит в A', откуда $b \in A'$. ∎

Отсюда следуют два важных результата.

Теорема 17.2 (Прюфер [2], Бэр [1]). *Ограниченная группа является прямой суммой циклических групп.*

Если A — ограниченная группа, то ее p-компоненты — тоже ограниченные группы. Если в цепи (1) выбрать в качестве каждого члена одну и ту же p-компоненту группы A, то из теоремы 17.1 получится, что эта p-компонента — прямая сумма циклических групп. ∎

Теорема 17.3 (Прюфер [1]). *Счетная p-группа является прямой суммой циклических групп тогда и только тогда, когда она не содержит отличных от нуля элементов бесконечной высоты.*

Проверки требует только достаточность. Пусть A — счетная p-группа без элементов бесконечной высоты и $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ —

некоторая ее система образующих. Тогда группа A является объединением возрастающей последовательности своих конечных подгрупп $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, высоты элементов в которых тривиальным образом ограничены. Остается применить теорему 17.1. ∎

Следующий пример, построенный А. Г. Курошем [2], показывает, что требование счетности в теореме 17.3 существенно. Пусть A — периодическая часть прямого произведения циклических групп $Z(p)$, $Z(p^2)$, ..., $Z(p^n)$, ... Тогда A есть p-группа мощности континуума без элементов бесконечной высоты. Предположим, что $A = \bigoplus\limits_n A_n$, где A_n — прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^n. Цоколи $S_n = \bigoplus\limits_{i=n}^{\infty} A_i\,[p]$ с возрастанием n образуют убывающую цепочку, причем S_n состоит в точности из тех элементов из $S_1 = A\,[p]$, которые имеют высоту $\geqslant n - 1$. Очевидно, элемент

$$a = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) \in \prod_n Z(p^n), \text{ где } b_n \in Z(p^n),$$

имеет высоту $\geqslant n - 1$ только при $b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$. Это показывает, что каждая факторгруппа S_n/S_{n+1} $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет порядок p. В силу того, что $A_n\,[p] \cong S_n/S_{n+1}$, мы заключаем, что группы A_n конечны, т. е. группа A счетна. Полученное противоречие показывает, что группа A не является прямой суммой циклических групп.

Если группа A разложима в прямую сумму циклических p-групп, то она может обладать многими такими прямыми разложениями. Но если рассматривать только порядки компонент, то здесь имеет место единственность.

Теорема 17.4. *Любые два разложения группы в прямую сумму циклических групп бесконечного порядка и порядков, равных степеням простых чисел, изоморфны.*

Пусть S_n — подгруппа группы $S = A\,[p]$, состоящая из элементов высоты $\geqslant n - 1$. Если A — прямая сумма циклических p-групп, то S_n — прямая сумма цоколей всех прямых слагаемых порядка $\geqslant p^n$. Следовательно, факторгруппа S_n/S_{n+1} изоморфна прямой сумме цоколей прямых слагаемых порядка p^n в разложении группы A. Мы получаем, что число прямых слагаемых порядка p^n в разложении группы A в прямую сумму циклических групп равно рангу группы S_n/S_{n+1}. Подгруппы S_n определялись независимо от прямых разложений, поэтому мощность $\mathfrak{m}_{p^n}$ множества прямых слагаемых порядка p^n в любом разложении группы A в прямую сумму циклических p-групп одинакова.

Так как число $\mathfrak{m}_0$ прямых слагаемых вида Z в разложении группы A в прямую сумму циклических групп равно $r_0(A)$, то из теоремы 16.3 мы получаем, что $\mathfrak{m}_0$ также однозначно определяется группой A. ∎

Предыдущая теорема утверждает, что для прямых сумм циклических групп Z и $Z(p^n)$ мощности $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}_{p^n}$ являются инвариантами. Для прямых сумм циклических групп это полная и независимая система инвариантов.

Упражнения

1. (а) Группа A является элементарной тогда и только тогда, когда каждая подгруппа группы A — прямое слагаемое.

(б) Группа A является элементарной тогда и только тогда, когда она — периодическая группа, подгруппа Фраттини которой нулевая.

(в) Группа A элементарна тогда и только тогда, когда она является своей единственной существенной подгруппой.

2. Подгруппа $A[n]$ всегда есть прямая сумма циклических групп.

3. Если A — прямая сумма конечных циклических групп, то $A/mA \cong A[m]$ для любого целого числа $m > 0$.

4. Пусть B — прямое произведение $\mathfrak{m}$ групп, изоморфных группе $Z(p^k)$, где p^k фиксировано, и A — прямое произведение $\mathfrak{n}$ групп, изоморфных B. Тогда A — прямая сумма групп, изоморфных $Z(p^k)$. Определить мощность множества прямых слагаемых в этом разложении.

5. Описать группы, в которых

(а) всякая максимальная независимая система элементов является базисом;

(б) всякая система образующих содержит базис.

6. Для p-групп доказать теорему 17.2 следующим образом: выбрать независимую систему элементов максимального порядка p^k, расширять ее последовательно элементами порядков $p^{k-1}, \ldots, p$ так, что на каждом шаге будет получаться независимая система, которую нельзя дальше расширить, и доказать, что полученная в результате система элементов — базис.

7 (Селе [3]). Пусть A есть ограниченная p-группа и p^r — максимальный порядок элементов из A. Тогда $a \in (p^r/o(a))A$ для любого элемента $a \in A$ в том и только в том случае, когда A — прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^r.

8 (Длаб [4]). (а) Если A есть ограниченная p-группа и $S = \{a_i\}_{i \in I}$ — такая система элементов группы A, что $a_i + pA$ $(i \in I)$ — система образующих для факторгруппы A/pA, то S порождает A.

(б) Всякая система образующих ограниченной p-группы содержит минимальную систему образующих.

(в) Для неограниченных p-групп утверждение (б) уже места не имеет.

9* (Дьедонне [2]). Обобщить теорему 17.1 следующим образом: если G есть p-группа, содержащая такую подгруппу A, что G/A — прямая сумма циклических групп и A — объединение возрастающей последовательности подгрупп A_n, в каждой из которых высоты элементов, взятые в G, ограничены, то G — прямая сумма циклических групп.

10. Доказать теорему 17.3 следующим образом: взять максимальную независимую систему элементов $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ в цоколе и рассмотреть все элементы b, для которых $p^k b = m_1 c_1 + \ldots + m_n c_n$, $m_n c_n \neq 0$, при фиксированном n; выбрать среди них для каждого n элемент b_n максимального порядка и доказать, что $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ — базис.

11. Пусть A, B — прямые суммы циклических групп.

(а) Из $A \oplus A \cong B \oplus B$ вытекает $A \cong B$.

(б) Из $A \oplus \ldots \oplus A \oplus \ldots \cong B \oplus \ldots \oplus B \oplus \ldots$ не следует $A \cong B$, даже если A, B — группы с конечным числом образующих.

12. Пусть A — прямая сумма счетного множества циклических групп порядка p^2, и пусть $B = A \oplus Z(p)$. Показать, что группы A и B не изоморфны, но обе они как абстрактные группы имеют одно и то же множество подгрупп и одно и то же множество факторгрупп.

13. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, где A_i — прямая сумма $\mathfrak{m}_i$ групп, изоморфных группе $Z(p^i)$, $i = 1, \ldots, k$. Описать структуры подгрупп и факторгрупп группы A.

14. (а) Пусть $G = \bigoplus_{k=1}^{\infty} Z(p^k)$. Доказать, что всякая счетная p-группа является эпиморфным образом группы G.

(б) Всякая p-группа мощности $\mathfrak{m}$ является эпиморфным образом прямой суммы $\mathfrak{m}$ групп, изоморфных группе G из пункта (а).

§ 18. Подгруппы прямых сумм циклических групп

Мы видели, что подгруппы свободных групп свободны, а из теоремы 17.3 тривиальным образом следует, что подгруппы счетных прямых сумм циклических p-групп сами являются прямыми суммами циклических групп. Это — частные случаи следующего общего результата.

Теорема 18.1 (Куликов [2]). *Подгруппы прямых сумм циклических групп сами являются прямыми суммами циклических групп.*

Пусть сначала A — прямая сумма циклических p-групп, и пусть $B \subseteq A$. Тогда A является объединением возрастающей цепи $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ своих подгрупп, где в подгруппе A_n высоты элементов ограничены, например, числом k_n. Очевидно, подгруппа B является объединением возрастающей цепи

$$B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots, \quad \text{где} \quad B_n = B \cap A_n,$$

и высоты элементов из B_n, взятые в группе B, не превосходят k_n. По теореме 17.1 группа B — прямая сумма циклических групп. Отсюда следует, что наша теорема справедлива для периодических групп.

Пусть A — произвольная прямая сумма циклических групп. Если T — ее периодическая часть, то $B \cap T$ — периодическая часть

подгруппы B группы A. Теперь $B/(B \cap T) \cong (B + T)/T \subseteq A/T$, где A/T — свободная группа. По теореме 14.5 группа $B/(B \cap T)$ свободна, и, таким образом, из теоремы 14.4 следует, что $B = (B \cap T) \oplus C$ для некоторой свободной подгруппы C группы B. Согласно доказанному в предыдущем абзаце, $B \cap T$ — прямая сумма циклических p-групп. Следовательно, B — прямая сумма циклических групп. ∎

Следствие 18.2 (Куликов [2]). *Любые два прямых разложения группы, являющейся прямой суммой циклических групп, обладают изоморфными продолжениями.*

В силу теоремы 18.1 каждое прямое слагаемое нашей группы есть прямая сумма циклических групп. Если заменить каждое прямое слагаемое прямой суммой циклических групп бесконечного порядка или порядков, равных степеням простых чисел, то мы получим продолжения исходных разложений, которые изоморфны по теореме 17.4. ∎

При определенных условиях мы можем заключить, что группа A является прямой суммой циклических групп, если подгруппа группы A — прямая сумма циклических групп.

Предложение 18.3 (Фукс [1], Мостовский и Сонсяда [1]). *Если B — такая подгруппа группы A, что B — прямая сумма циклических групп и A/B — ограниченная группа, то A — прямая сумма циклических групп.*

По условию $nA \subseteq B \subseteq A$ для некоторого целого числа n. Из теоремы 18.1 вытекает, что nA — прямая сумма циклических групп. Таким образом, достаточно доказать, что A — прямая сумма циклических групп, если pA — прямая сумма циклических групп для некоторого простого числа p.

Пусть $pA = \bigoplus_{i \in I} \langle b_i \rangle$, где $o(b_i)$ — бесконечность или степень простого числа для каждого $i \in I$. Выберем такие элементы $a_i \in A$, что $pa_i = b_i$ для $i \in I$, причем $a_i \in \langle b_i \rangle$, если порядок $o(b_i)$ взаимно прост с p. Независимую систему $\{a_i\}_{i \in I}$ расширим с помощью множества $\{c_j\}_{j \in J}$ до максимальной независимой системы элементов $\{a_i, c_j\}_{i,j}$ группы A. Мы утверждаем, что A — прямая сумма циклических групп $\langle a_i \rangle$ и $\langle c_j \rangle$. Нам нужно только показать, что каждый элемент $a \in A$ лежит в этой прямой сумме. Очевидно, $pa = n_1 b_1 + \ldots + n_k b_k = p(n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k)$ и, таким образом, $a' = a - n_1 a_1 - \ldots - n_k a_k$ лежит в цоколе группы A. Так как a' зависит от $\{a_i, c_j\}_{i,j}$ и потому выражается в виде линейной комбинации элементов a_i, c_j, то это же имеет место для элемента a. ∎

Из предложения 18.3 легко вывести

Следствие 18.4 (Куликов [2]). *Всякая группа A является объединением возрастающей последовательности $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ своих подгрупп, где каждая подгруппа A_n — прямая сумма циклических групп.*

Через A_1 обозначим подгруппу, порожденную максимальной независимой системой элементов группы A. Если для некоторого n подгруппа A_{n-1} уже определена, то положим $A_n = n^{-1}A_{n-1} = \{a \in A \mid na \in A_{n-1}\}$. Из выбора подгруппы A_1 следует, что объединение $\bigcup A_n$ по всем n совпадает с A, а из предложения 18.3 последовательно получается, что A_n — прямая сумма циклических групп. ∎

Результаты этого параграфа непосредственно переносятся на p-адические модули.

Упражнения

1. Пусть A есть p-группа. Периодическая часть прямого произведения $\prod A$, где число компонент бесконечно, является прямой суммой циклических групп тогда и только тогда, когда в группе A порядки элементов ограничены в совокупности.

2. Если B и A/B — прямые суммы циклических групп и в группе A/B элементы конечного порядка имеют ограниченные в совокупности порядки элементов, то A — прямая сумма циклических групп.

3 (Селе [5]). Пусть

$$A = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots ; a_0 = m_1a_1 = \ldots = m_na_n = \ldots \rangle,$$

где m_n — натуральные числа. Группа A является прямой суммой циклических групп тогда и только тогда, когда система $\{m_n\}_n$ ограниченная.

4. Пусть $A = B + C$, где B и C — прямые суммы циклических групп. Тогда группа A не обязательно является прямой суммой циклических групп.

5. Связать инварианты прямой суммы циклических групп с инвариантами ее подгрупп.

6. Доказать теорему 18.1 для модулей над кольцом целых p-адических чисел.

7. *Примитивным классом*, или *многообразием*, групп называется класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, факторгрупп и прямых произведений.

(а) Доказать, что примитивные классы абелевых групп исчерпываются следующими классами: 1) все абелевы группы; 2) все абелевы группы, n-кратное любого элемента которых равно нулю, где n — произвольное, но фиксированное натуральное число.

(б) Показать, что наименьшее многообразие, содержащее группу Z [или $Z(n)$],— это многообразие, указанное в п. 1) [в п. 2)].

§ 19. Счетные свободные группы

Теорема Л. Я. Куликова 17.1 дает удобное необходнмое и достаточное условие для того, чтобы периодическая группа была прямой суммой циклических групп. Но для произвольных групп удовлетворительного условия для этого пока не найдено. Известные критерии

касаются выбранного множества элементов, именно базиса группы, и их гораздо лучше рассматривать как условия, при которых заданное или выбранное подмножество является или не является базисом. Критерии существования базиса можно найти у Фукса в [1] или [7].

Однако в случае счетных групп без кручения полезный критерий существует.

Теорема 19.1 (Понтрягин [1]). *Счетная группа без кручения является свободной тогда и только тогда, когда каждая ее подгруппа конечного ранга свободна. Это эквивалентно тому, что для любого целого числа n подгруппы ранга $\leqslant n$ удовлетворяют условию максимальности.*

В силу теоремы 14.5 необходимость очевидна. Чтобы доказать достаточность, предположим, что $A = \langle a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ — счетная группа без кручения, каждая подгруппа которой, имеющая конечный ранг, свободна. Обозначим через A_n множество, состоящее из всех элементов $a \in A$, зависящих от $\{a_1, \ldots, a_n\}$, и нуля. Тогда A_n будет подгруппой ранга $\leqslant n$. Очевидно, $r(A_{n+1}) \leqslant r(A_n) + 1$, поэтому или группа A имеет конечный ранг [в этом случае утверждение тривиально], или существует такая подпоследовательность B_n последовательности групп A_n, что $r(B_n) = n$ и A — объединение возрастающей цепи $0 = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots$. Теперь B_{n+1}/B_n— группа без кручения [так как A/A_n — без кручения] ранга 1 с конечным числом образующих. Следовательно, $B_{n+1}/B_n \cong Z$. Из теоремы 14.4 получаем, что $B_{n+1} = B_n \oplus \langle b_{n+1} \rangle$ для некоторого b_{n+1}. Это означает, что элементы $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ порождают прямую сумму $\bigoplus_n \langle b_n \rangle$, откуда $A = \bigoplus_n \langle b_n \rangle$.

Эквивалентность первой и второй формулировки вытекает из теоремы 15.5. ∎

Следует заметить, что для групп больших мощностей предыдущая теорема уже не верна. Это вытекает из следующей теоремы, которая имеет и самостоятельный интерес.

Пусть $\aleph_\sigma$ — кардинальное число. Будем называть группу *$\aleph_\sigma$-свободной*, если все ее подгруппы мощности $< \aleph_\sigma$ свободны.

Теорема 19.2 (Бэр [2], Шпекер [1]). *Прямое произведение бесконечного множества бесконечных циклических групп является $\aleph_1$-свободной, но не свободной группой.*

Пусть $A = \prod_{i \in I} \langle a_i \rangle$, где множество I бесконечно и $\langle a_i \rangle \cong Z$ для каждого i. Докажем сначала, что всякое конечное множество элементов $\{b_1, \ldots, b_m\} \subset A$ может быть вложено в конечно порожденное прямое слагаемое группы A. Если $m = 1$ и $b_1 \neq 0$, то пусть $b_1 = (\ldots, n_i a_i, \ldots)$, где $n_i \in \mathbf{Z}$. Если существует такое $j \in I$, что $|n_j| = 1$, то $A = \langle b_1 \rangle \oplus A_j$, где A_j состоит из всех элементов группы

A, j-я координата которых равна нулю. Если минимум n всех чисел $|n_i|$, где $n_i \neq 0$, больше 1, то пусть $n_i = q_i n + r_i$ $(0 \leqslant r_i < n)$. Возьмем элементы $c_1 = (\ldots, q_i a_i, \ldots)$, $c_2 = (\ldots, r_i a_i, \ldots)$ группы A. Тогда будет $b_1 = nc_1 + c_2$. Существует такое j, что $|q_j| = 1$ и $r_j = 0$, поэтому $A = \langle c_1 \rangle \oplus A_j$, где $c_2 \in A_j$, причем для коэффициентов элемента c_2 выполнено $|r_i| < n$. По индуктивному предположению группа A_j обладает конечно порожденным прямым слагаемым B', содержащим c_2, и, таким образом, $\langle c_1 \rangle \oplus B'$ — прямое слагаемое группы A, содержащее b_1. Пусть теперь $m > 1$, и пусть группа A обладает таким конечно порожденным прямым слагаемым B, что $b_1, \ldots, b_{m-1} \in B$. Мы можем дополнительно предположить, что $A = B \oplus C$, где C — прямое произведение почти всех подгрупп $\langle a_i \rangle$. Полагая $b_m = b + c$ $(b \in B,\ c \in C)$ и вкладывая элемент c в конечно порожденное прямое слагаемое C' группы C, получаем, что $B \oplus C'$ — конечно порожденное прямое слагаемое группы A, содержащее $b_1, \ldots, b_m$.

Если теперь G — счетная подгруппа группы A, то максимальная независимая система элементов подгруппы G' группы G конечного ранга содержится в конечно порожденном прямом слагаемом B группы A. Так как A/B — группа без кручения, то $G' \subseteq B$. Из теоремы 19.1 следует, что G — свободная группа. Следовательно, группа A является $\aleph_1$-свободной.

Если бы группа A была свободной, то и все подгруппы группы A были бы свободными, поэтому нам достаточно найти несвободную подгруппу H группы A. Пусть H — подгруппа группы $A' = \prod_{i=1}^{\infty} \langle a_i \rangle$, состоящая из всех таких элементов $b = (n_1 a_1, \ldots, n_i a_i, \ldots)$, что для любого натурального числа m и фиксированного простого числа p почти все коэффициенты n_i делятся на p^m. Очевидно, подгруппа H имеет мощность континуума и содержит $\oplus \langle a_i \rangle$. Так как всякий смежный класс группы H по подгруппе pH содержит некоторый элемент из $\oplus \langle a_i \rangle$, то H/pH имеет счетную мощность. Сравнение мощностей групп H и H/pH показывает, что группа H не может быть свободной. ∎

Отсюда непосредственно получается

Следствие 19.3 (Штейн). *Всякая счетная группа A может быть представлена в виде*

$$A = N \oplus F,$$

где F — свободная группа, а группа N не имеет свободных фактор-групп. Подгруппа N определяется группой A однозначно.

Пусть N — пересечение ядер всех гомоморфизмов η: $A \to Z$. Тогда группа A/N изоморфна подгруппе прямого произведения бесконечных циклических групп и, следовательно, по теореме 19.2 свободна. В силу теоремы 14.4 N служит для A прямым слагаемым. Единственность подгруппы N вытекает из замечания, что если M — какое-то

прямое слагаемое группы A, не имеющее свободных факторгрупп, то его проекция на F по теореме 14.5 должна быть нулевой, откуда $M \subseteq N$. ■

Упражнения

1. Счетная группа является прямой суммой циклических групп тогда и только тогда, когда всякую ее конечную систему элементов можно вложить в прямое слагаемое с конечным числом образующих.

2 (Селе [3]). Пусть $L = \{a_i\}_{i \in I}$ — система образующих группы A, в которой каждый элемент a_i имеет или бесконечный порядок, или порядок, равный степени простого числа. Система L служит базисом для A, если всякая конечная подсистема $a_1, \ldots, a_k$ элементов из L удовлетворяет такому условию: если $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle$, где $o(b_i) = \infty$ или p^r, то

$$\min(o(a_1), \ldots, o(a_k)) \leqslant \min(o(b_1), \ldots, o(b_k)).$$

3. Подмножество $\{a_i\}_{i \in I}$ группы без кручения A является базисом группы A тогда и только тогда, когда оно — такая минимальная система образующих, что если элемент $a \in A$ зависит от конечного подмножества $\{a_1, \ldots, a_k\}$, то $a \in \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$.

4. Доказать то же утверждение с заменой слов «минимальная система образующих» словами «максимальная независимая система».

5. (а) Пересечение прямых слагаемых счетной свободной группы само является прямым слагаемым. [*Указание*: сравнить с упражнением 4 из § 14; применить теорему 19.2 к факторгруппе по пересечению.]

(б) Для свободной группы мощности континуума это уже не так.

6. При любом задании группы $Z^{\aleph_0}$ образующими и определяющими соотношениями получается несчетное множество определяющих соотношений.

7. Для любого кардинального числа $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$ существуют $\aleph_1$-свободные, но не свободные группы мощности $\mathfrak{m}$.

Замечания

Существование свободных объектов в категории всех абелевых групп играет фундаментальную роль. Хотя в гомологической алгебре особенно важна проективность, в теории абелевых групп, видимо, бо́льшую роль играет свобода. К счастью, для абелевых групп свобода и проективность — эквивалентные понятия. Для модулей проективные объекты — это в точности прямые слагаемые свободных модулей. Они свободны над локальными кольцами [см. Капланский [3]], а также над кольцами полиномов от конечного числа не коммутирующих между собой переменных с коэффициентами из коммутативного поля [см. Cohen P., *J. Algebra*, 1 (1964), 47—69].

Теорема 14.5 справедлива для модулей над областями главных левых идеалов. Подмодули проективных модулей сами проективны тогда и только тогда, когда кольцо наследственно слева, т. е. все левые идеалы проективны. Предложение 14.1 справедливо для модулей над коммутативными кольцами, а также при предположении, что хотя бы одно из кардинальных чисел $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ бесконечно.

Однако, существуют такие кольца R, что все ненулевые свободные R-модули с конечными системами образующих изоморфны.

Быть может, полезно отметить, что любой R-модуль свободен тогда и только тогда, когда R — поле, и любой R-модуль проективен в точности тогда, когда R — полупростое артиново кольцо.

Модуль M называется *квазипроективным*, если для всякого эпиморфизма β: $M \to N$ и всякого гомоморфизма φ: $M \to N$ существует такой эндоморфизм ψ модуля M, что $\beta\psi = \varphi$. Квазипроективные модули изучались Ву и Джансом [Wu L., Jans P., *Ill. J. Math.*, **11** (1967), 439—448]. Абелева группа квазипроективна в точности тогда, когда она или свободна, или является периодической группой, каждая p-компонента которой — прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^n; см. работу Фукса и Рангасвами [Fuchs L., Rangaswamy K., *Bull. Soc. Math. France*, **98**, № 1 (1970), 5—8].

Существует много обобщений результатов § 15. Капланский [Kaplansky I., *J. Indian Math. Soc.*, **24** (1960), 279—281] доказал, что для коммутативных областей целостности R периодические части всех конечно порожденных R-модулей служат прямыми слагаемыми в точности тогда, когда R — прюферово кольцо. Матлис [Matlis E., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **125** (1966), 147—179] получил значительные результаты, касающиеся описания коммутативных областей целостности, над которыми периодические модули с конечным числом образующих разлагаются в прямую сумму циклических модулей. Считая R коммутативным нётеровым кольцом, А. И. Узков [Мат. сб., **62** (1963), 469—475] показал, что всякий конечно порожденный R-модуль является прямой суммой циклических модулей тогда и только тогда, когда R — кольцо главных идеалов.

Если кольцо не является нётеровым слева, конечно порожденные модули отличаются от конечно связанных модулей [где предполагается также конечность множества определяющих соотношений]. С этими последними модулями иметь дело несколько легче, и справедливо, что всякий модуль является прямым пределом конечно связанных модулей. Всякий конечно связанный R-модуль разлагается в прямую сумму циклических модулей тогда и только тогда, когда R — кольцо элементарных делителей, т. е. всякая матрица над R приводится к диагональному виду путем умножения слева и справа на унимодулярные матрицы [Kaplansky I., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 464—491]. В этом случае справедлива лемма 15.4.

До сих пор мало изучались бесконечные прямые суммы циклических модулей, даже не была решена проблема единственности разложения. Одна из трудностей здесь заключается в том факте, что максимальные независимые системы уже не дают инвариантов для модулей, исключение составляют модули над весьма узким классом колец [см. Kertész A., *Acta Sci. Math. Szeged*, **21** (1960), 260—269, и Fuchs L., *Annales Univ. Sci. Budapest*, **6** (1963), 71—78].

Проблема 9. Охарактеризовать группы, в которых пересечение двух прямых слагаемых снова является прямым слагаемым.

См. упражнение 4 из § 14 и упражнение 5 из § 19.

Проблема 10. Для каких порядковых чисел σ существуют $\aleph_\sigma$-свободные, но не $\aleph_{\sigma+1}$-свободные группы?

Проблема 11. Исследовать K-прямые суммы циклических групп.

Глава IV

ДЕЛИМЫЕ ГРУППЫ

Эта глава посвящена одному из важнейших классов абелевых групп: делимым группам. Делимые группы распознаются очень легко. Они обладают многими специальными свойствами, которые являются для них характеристическими. Одним из наиболее выдающихся свойств этих групп является то, что они совпадают с инъективными группами, которые определяются двойственно проективным группам; таким образом, эти группы служат прямыми слагаемыми для всякой группы, их содержащей. Строение делимых групп полностью описано, так что теория делимых групп настолько удовлетворительна, насколько это может быть при современном состоянии алгебры.

Конец этой главы касается замечательной двойственности между условиями максимальности и минимальности.

§ 20. Делимость

Так как умножение элементов группы на целые числа имеет смысл, естественно ввести делимость элементов группы на целые числа.

Мы скажем, что элемент a группы A *делится* на натуральное число n (это обозначается так: $n|a$), если уравнение

$$nx = a \quad (a \in A) \tag{1}$$

имеет решение в группе A. Это означает, что группа A содержит такой элемент b, что $x = b$ — решение уравнения (1). Очевидно, существование решения уравнения (1) эквивалентно тому, что $a \in nA$.

Укажем некоторые простейшие следствия из этого определения.

а) Если $x = b$ — решение уравнения (1), то множество всех элементов смежного класса $b + A[n]$ — это множество всех решений уравнения (1).

б) Если A — группа без кручения, то уравнение (1) имеет не более одного решения.

в) Если $(n, o(a)) = 1$, то уравнение (1) всегда имеет решение. В самом деле, если r, s — такие целые числа, что $nr + o(a)s = 1$, то для $x = ra$ выполнены равенства $nx = nra = nra + o(a)sa = a$.

г) Если $m \mid a$ и $n \mid a$, то $[m, n] \mid a$. Пусть r, s — такие целые числа, что $mr + ns = d = (m, n)$, и пусть для элементов $b, c \in A$ выполняются соотношения $mb = a$, $nc = a$. Тогда $[m, n](rc + sb) = mnd^{-1}(rc + sb) = md^{-1}ra + nd^{-1}sa = a$.

д) Если $n \mid a$ и $n \mid b$, то $n \mid a \pm b$.

е) Если $A = B \oplus C$, то $n \mid a = b + c$ $(b \in B, c \in C)$ тогда и только тогда, когда $n \mid b$ и $n \mid c$. То же верно для бесконечных прямых сумм и прямых произведений.

ж) Для любого гомоморфизма α: $A \to B$ из того, что $n \mid a$ в группе A, вытекает, что $n \mid \alpha a$ в группе B.

з) Если p — простое число, то $p^k \mid a$ тогда и только тогда, когда $k \leqslant h_p(a)$.

Группа D называется *делимой*, если $n \mid a$ для всех $a \in D$ и всех натуральных чисел n. Таким образом, D — делимая группа тогда и только тогда, когда $nD = D$ для любого натурального n. Группы Q, $Z(p^\infty)$, Q/Z служат примерами делимых групп, но прямая сумма циклических групп делимой группой не является [если только она не нулевая].

Группа D называется *p-делимой*, если $p^kD = D$ для любого натурального числа k. Так как $p^kD = p \dots pD$, то, очевидно, p-делимость следует из равенства $pD = D$. Последнее равенство эквивалентно тому, что каждый элемент группы D делится на p.

А) *Группа является делимой тогда и только тогда, когда она p-делима для любого простого числа p.*

Если $pD = D$ для каждого простого числа p и $n = p_1 \dots p_r$, то $nD = p_1 \dots p_rD = D$. Следовательно, делимость эквивалентна тому, что каждый элемент группы имеет бесконечную p-высоту для любого простого числа p.

Б) *p-группа делима тогда и только тогда, когда она p-делима.*

В силу п. в) для p-группы D всегда справедливо равенство $qD = D$, где q — простое число, отличное от p.

В) *Если в p-группе D всякий элемент порядка p имеет бесконечную высоту, то D — делимая группа.*

Пусть элемент $a \in D$ имеет порядок p^n. Докажем индукцией по n, что $p \mid a$. Для $n = 1$ это следует из условия. Предположим, что $n > 1$ и что для элементов порядка $< p^n$ все уже доказано. По предположению элемент $p^{n-1}a$ имеет бесконечную высоту, поэтому $p^{n-1}a = p^nb$ для некоторого $b \in D$. Так как $o(a - pb) \leqslant p^{n-1}$, то $p \mid a - pb$, откуда $p \mid a$.

Г) *Любой эпиморфный образ делимой группы является делимой группой.*

Это следует из п. ж).

Д) *Прямая сумма и прямое произведение являются делимыми группами тогда и только тогда, когда каждая компонента — делимая группа.*

Это вытекает из п. е).

Е) *Если D_i ($i \in I$) — делимые подгруппы группы A, то и $\sum D_i$ — делимая подгруппа.*

Это очевидно в силу свойства д).

Упражнения.

1. Группа делима тогда и только тогда, когда в ней нет максимальных подгрупп [т. е. когда она совпадает со своей подгруппой Фраттини].

2. Группа делима тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых конечных эпиморфных образов.

3. Аддитивная группа любого поля характеристики 0 делима.

4. Факторгруппа J_p/Z делима.

5. Если подгруппа B группы A является p-делимой и факторгруппа A/B также p-делима, то A есть p-делимая группа.

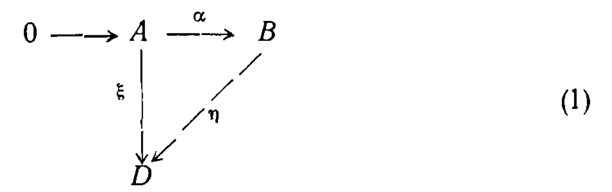
6. Пусть A — прямое произведение, B — прямая сумма групп B_n ($n = 1, 2, \ldots$). Тогда A/B — делимая группа в том и только в том случае, когда для любого простого числа p при почти всех n справедливо $pB_n = B_n$.

7. Если $L = \{a_i\}_{i \in I}$ — максимальная независимая система элементов группы D и $n \mid a_i$ для каждого $i \in I$ и любого натурального числа n, то D — делимая группа.

§ 21. Инъективные группы

Инъективные группы двойственны проективным группам; они определяются путем дуализации определения проективности.

Группа D называется *инъективной*, если для любой диаграммы



с точной строкой существует гомоморфизм η: $B \to D$, превращающий эту диаграмму в коммутативную. Если отождествить A и αA, то инъективность группы D можно интерпретировать как возможность продолжить любой гомоморфизм ξ: $A \to D$ до гомоморфизма группы B, содержащей A, в группу D.

Наша основная цель состоит в том, чтобы показать, что инъективные группы — это в точности делимые группы. Этот результат получается в теоремах 21.1 и 24.5.

Теорема 21.1 (Бэр [3]). *Делимые группы инъективны.*

Пусть D — делимая группа, и пусть дана диаграмма (1), где группу A мы будем рассматривать как подгруппу группы B. Рассмотрим все группы G, лежащие между A и B, $A \subseteq G \subseteq B$, для которых существует продолжение θ: $G \to D$ гомоморфизма ξ. Частично упорядочим множество пар (G, θ), полагая $(G, \theta) \leqslant (G', \theta')$, если $G \subseteq G'$ и θ — ограничение гомоморфизма θ': $G' \to D$ на G. Множество этих пар не

пусто, так как ему принадлежит пара (A, ξ), и индуктивно, так как всякая цепь (G_i, θ_i) $(i \in I)$ имеет верхнюю грань, а именно (G, θ), где $G = \bigcup_i G_i$, а $\theta\colon G \to D$ совпадает с θ_i на G_i. По лемме Цорна в рассматриваемом множестве существует максимальная пара (G_0, θ_0). Если $G_0 \subset B$ и для элемента $b \in B \setminus G_0$ имеет место включение $nb \in G_0$ при некотором $n > 0$, то возьмем минимальное n с этим свойством и предположим, что $nb = g \in G_0$. В силу делимости группы D для некоторого $x \in D$ имеем $nx = \theta_0 g$. Легко проверить, что отображение

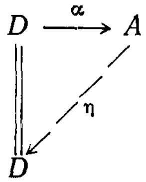
$$c + rb \mapsto \theta_0 c + rx \quad (c \in G_0,\ 0 \leqslant r < n) \tag{2}$$

является гомоморфизмом группы $\langle G_0, b\rangle$ в группу D. Если $nb \notin G_0$ при $n \neq 0$, то формула (2) дает гомоморфизм группы $\langle G_0, b\rangle$ в группу D при произвольном $x \in D$ [на r тогда ограничений не накладывается]. Следовательно, предположение, что $G_0 \subset B$, противоречит максимальности пары (G_0, θ_0), т. е. $G_0 = B$ и $\theta_0 = \eta$. ■

Теперь мы в состоянии показать, что делимые подгруппы выделяются прямыми слагаемыми.

Теорема 21.2 (Бэр [3]). *Делимая подгруппа D группы A служит для A прямым слагаемым, т. е. $A = D \oplus C$ для некоторой подгруппы C группы A. Эту подгруппу C можно выбрать так, что она будет содержать заранее заданную подгруппу B группы A, для которой $D \cap B = 0$.*

По теореме 21.1 для естественного вложения $\alpha\colon D \to A$ и тождественного отображения $1_D\colon D \to D$ существует такой гомоморфизм $\eta\colon A \to D$, что диаграмма



коммутативна. Предложение 9.2 показывает, что $A = D \oplus \operatorname{Ker} \eta$.

Если для подгруппы $B \subseteq A$ имеет место равенство $D \cap B = 0$, то $D + B = D \oplus B$ и существует гомоморфизм $\xi\colon D \oplus B \to D$, совпадающий с тождественным на D и нулевой на B. Если в предыдущем абзаце заменить 1_D на ξ, то получится, что $A = D \oplus \operatorname{Ker} \eta$, где $B \subseteq \operatorname{Ker} \eta$. ■

Вторая часть этой теоремы утверждает, что делимая группа является абсолютным прямым слагаемым.

Если дана группа A, то рассмотрим в ней подгруппу D, порожденную всеми делимыми подгруппами группы A. По свойству E) из § 20 D — делимая группа. Таким образом, это — *максимальная делимая подгруппа* группы A. Очевидно, подгруппа D является вполне характеристической в A. В силу теоремы Бэра $A = D \oplus C$, где, очевидно, C — *редуцированная* группа в том смысле, что она не имеет ненулевых делимых подгрупп. Мы, следовательно, получаем:

Теорема 21.3. *Всякая группа A является прямой суммой делимой группы D и редуцированной группы C,*

$$A = D \oplus C.$$

Подгруппа D группы A здесь определена однозначно, подгруппа C — однозначно с точностью до изоморфизма.

Последнее утверждение вытекает из того, что если D — максимальная делимая подгруппа группы A и $A = D' \oplus C'$, где D' — делимая, а C' — редуцированная подгруппа, то по лемме 9.3 $D = (D \cap D') \oplus \oplus (D \cap C')$. Здесь $D \cap C' = 0$ как прямое слагаемое делимой группы, содержащееся в редуцированной группе, поэтому $D \cap D' = D$, $D \subseteq D'$, т. е. $D = D'$. ∎

Последняя теорема сводит проблему описания строения абелевых групп к проблеме описания строения делимых и редуцированных групп.

Упражнения

1. Пусть E — существенная подгруппа делимой группы D. Показать, что всякий автоморфизм группы E продолжается до автоморфизма группы D.

2. Если A — группа без кручения, то ее максимальная делимая подгруппа является первой ульмовской подгруппой группы A.

3. Группа C обладает тем свойством, что любая ненулевая группа может быть гомоморфно отображена на ненулевую подгруппу группы C, тогда и только тогда, когда Q/Z — прямое слагаемое группы C.

4 (Селпал [1]). Если все ненулевые факторгруппы группы A изоморфны A, то $A \cong Z(p^k)$, где или $k = 1$, или $k = \infty$.

5. Прямая сумма и прямое произведение групп являются редуцированными группами тогда и только тогда, когда каждая компонента — редуцированная группа.

6. Привести пример убывающей цепи делимых подгрупп, пересечение которых не является делимой подгруппой. [*Указание*: в прямой сумме счетного числа изоморфных между собой групп $Z(p^\infty)$ построить убывающую последовательность делимых подгрупп, пересечение которых имеет порядок p.]

7. Доказать теорему 21.2 так: выбрать D-высокую подгруппу и применить лемму 9.9.

8. (а) (Уокер Э. [2]) Всякая группа без кручения бесконечного ранга является подпрямой суммой групп, изоморфных группе Q.

(б) Неограниченная p-группа является подпрямой суммой квазициклических групп.

9. Прямой предел инъективных групп является инъективной группой.

§ 22. Системы уравнений

В силу определения делимых групп в делимой группе D все «линейные» уравнения вида $nx = a \in D$, где n — натуральное число, имеют решение. Мы докажем значительно более сильное утверждение, что в делимых группах имеют также решение все согласованные системы линейных уравнений.

Системой уравнений над группой A называется совокупность уравнений

$$\sum_{j \in J} n_{ij} x_j = a_i \quad (a_i \in A, \ i \in I), \tag{1}$$

где n_{ij} — целые числа, причем если i фиксировано, то $n_{ij} = 0$ для всех j, кроме, самое большее, конечного числа. Здесь $\{x_j\}_{j \in J}$ — множество неизвестных, а I, J — множества индексов произвольной мощности.

$$x_j = g_j \in A \qquad (j \in J)$$

называется *решением* системы (1), если система (1) удовлетворяется при замене x_j элементами g_j. Очевидно, решение можно рассматривать как элемент $(\ldots, g_j, \ldots)$ прямого произведения A^J.

Для разрешимости системы (1) тривиальным необходимым условием является то, что система (1) должна быть согласованной в том смысле, что если линейная комбинация левых частей уравнений обращается в нуль, то она остается равной нулю и при замене левых частей уравнений соответствующими правыми частями. Следуя Кертесу [3], мы дадим другую, более глубокую интерпретацию согласованности и разрешимости системы уравнений.

Левую часть уравнения системы (1) можно рассматривать как элемент свободной группы X, построенной на множестве неизвестных $\{x_j\}_{j \in J}$. Пусть Y — подгруппа группы X, порожденная всеми левыми частями $f_i(x) = \sum_j n_{ij} x_j$ уравнений системы (1). Соответствие

$$f_i(x) \mapsto a_i \quad (i \in I) \tag{2}$$

порождает гомоморфизм η: $Y \to A$ тогда и только тогда, когда всякая линейная комбинация элементов $f_i(x)$, равная нулю, отображается в 0, т. е. когда система (1) является согласованной в указанном выше смысле. В соответствии с этим мы будем называть систему (1) *согласованной*, если отображение (2) продолжается до гомоморфизма η: $Y \to A$.

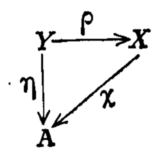
Согласованную систему (1) удобно рассматривать как пару (Y, η), где Y — подгруппа свободной группы X, множество свободных образующих которой совпадает с множеством неизвестных, а η — гомоморфизм группы Y в группу A. Очевидно, две системы уравнений определяют одну и ту же пару (Y, η) тогда и только тогда, когда уравнения каждой из этих систем являются линейными комбинациями

уравнений другой системы. В этом случае, очевидно, множества решений обеих систем совпадают.

Легко показать, что $x_j = g_j$ ($j \in J$) является решением системы (1) тогда и только тогда, когда отображение

$$x_j \mapsto g_j \quad (j \in J) \tag{3}$$

продолжается до гомоморфизма χ: $X \to A$, ограничение которого на Y дает η. Таким образом, система (Y, η) разрешима в точности тогда, когда существует гомоморфизм χ, при котором диаграмма



коммутативна; здесь ρ — естественное вложение. Кроме того, гомоморфизмы χ и решения системы (Y, η) находятся во взаимно однозначном соответствии, поэтому решение системы (Y, η) можно обозначить через (X, χ).

Теперь мы можем доказать следующее:

Теорема 22.1 (Гачайи [1]). *Всякая согласованная система уравнений над группой A допускает решение в A тогда и только тогда, когда A — делимая группа.*

Так как одно уравнение $nx = a$, где $n \neq 0$, является согласованной системой, то необходимость очевидна. Переходя к доказательству достаточности, возьмем согласованную систему уравнений (Y, η) над делимой группой A. По теореме 21.1 гомоморфизм η можно продолжить до гомоморфизма χ: $X \to A$. Следовательно, решение существует. ∎

Так как согласованность — это свойство конечного характера, то сразу получается

Следствие 22.2 (Гачайи [1]). *Система уравнений над делимой группой D разрешима в D тогда и только тогда, когда каждая ее конечная подсистема имеет решение в D.* ∎

В связи с системами уравнений важно упомянуть следующий результат.

Предложение 22.3 (Гачайи [2], Бальцежик [1]). *Подгруппа B группы A служит для A прямым слагаемым тогда и только тогда, когда всякая система уравнений над B, имеющая решение в группе A, имеет решение и в B.*

Если B — прямое слагаемое группы A, т. е. $A = B \oplus C$, то компоненты в B решения из A, очевидно, удовлетворяют системе уравнений над B.

Обратно, предположим, что всякая система уравнений над B, имеющая решение в группе A, имеет решение и в B. В каждом смежном классе u группы A по подгруппе B выберем по представителю $a(u) \in A$ и рассмотрим систему уравнений

$$x_u + x_v - x_{u+v} = a(u) + a(v) - a(u+v) \in B \quad \text{для всех } u, v \in A/B.$$

По предположению она имеет решение $x_u = b(u) \in B$. Тогда $a(u) - b(u)$ — представители смежных классов $u \in A/B$, образующие подгруппу в группе A. Следовательно, B служит для A прямым слагаемым. ■

Упражнения

1. Если система уравнений над делимой группой D имеет решение в группе, содержащей D, то она имеет решение и в D.

2. Система уравнений над группой A является согласованной тогда и только тогда, когда она имеет решение в некоторой группе, содержащей A. [*Указание*: для доказательства достаточности рассмотреть универсальный квадрат для η: $Y \to A$ и вложения ρ: $Y \to X$.]

3. Всякая система уравнений над делимой группой содержит максимальную разрешимую подсистему.

4. (а) Однородная система уравнений $(Y, 0)$ над произвольной группой A допускает нетривиальное решение тогда и только тогда, когда существует ненулевой гомоморфизм φ: $X/Y \to A$. Нетривиальные решения и эти гомоморфизмы φ находятся во взаимно однозначном соответствии.

(б) Однородная система n уравнений с $n + 1$ неизвестными имеет нетривиальное решение во всякой ненулевой группе.

5. Доказать, что

$$x_1 - px_2 = 1, \quad x_2 - p^2x_3 = 1, \ \ldots, \ x_n - p^nx_{n+1} = 1, \ \ldots$$

[для любого простого числа p] — система уравнений над Z, которая не имеет решения в группе Z, хотя всякая ее конечная подсистема имеет в этой группе решение.

§ 23. Строение делимых групп

Группы $Z(p^\infty)$ и Q были нашими первыми примерами делимых групп. Теорема о строении делимых групп показывает, что все делимые группы исчерпываются прямыми суммами групп $Z(p^\infty)$ и Q.

Теорема 23.1. *Всякая делимая группа D является прямой суммой квазициклических групп и групп, изоморфных полной рациональной группе. Мощности множеств компонент $Z(p^\infty)$ [для каждого p] и Q составляют полную и независимую систему инвариантов группы D.*

Очевидно, периодическая часть T группы D — делимая группа. Из теоремы 21.2 следует, что $D = T \oplus E$, где E — группа без кручения, очевидно, снова делимая. Если p-компоненту группы T обозна-

чить через T_p, то получим

$$D = \bigoplus_p T_p \oplus E,$$

и достаточно показать, что T_p — прямая сумма групп $Z(p^\infty)$, а E — прямая сумма групп Q.

Выберем в цоколе группы T_p максимальную независимую систему элементов $\{a_i\}_{i \in I}$. В силу делимости в группе T_p для каждого i существует такая бесконечная последовательность элементов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, \ldots$, что $a_{i1} = a_i$, $pa_{i,n+1} = a_{in}$, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда мы заключаем, что каждый элемент a_i может быть вложен в подгруппу $A_i \cong Z(p^\infty)$ группы T_p, именно, $A_i = \langle a_{i1}, \ldots, a_{in}, \ldots \rangle$. Так как $\langle a_i \rangle$ — цоколь группы A_i и элементы a_i ($i \in I$) независимы, то подгруппы A_i порождают в группе T_p подгруппу A, являющуюся их прямой суммой: $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$. Группа A является делимой подгруппой, т. е. прямым слагаемым группы T_p. Но A содержит цоколь группы T_p, поэтому $A = T_p$, и T_p — прямая сумма групп $Z(p^\infty)$.

Выберем максимальную независимую систему элементов $\{b_j\}_{j \in J}$ в группе E. Так как E — делимая группа без кручения, то при любом положительном $n \in \mathbf{Z}$ существует ровно один элемент $x \in E$, для которого $nx = b_j$. Это означает, что каждый элемент b_j может быть вложен в подгруппу $B_j \cong Q$ группы E. Так как $\{b_j\}$ — независимая система элементов, то подгруппы B_j порождают в E подгруппу B, являющуюся их прямой суммой: $B = \bigoplus_{j \in J} B_j$. Эта подгруппа — прямое слагаемое группы E, содержащее максимальную независимую систему элементов из E, поэтому $B = E$, и E — прямая сумма групп, изоморфных группе Q.

Число прямых слагаемых, изоморфных $Z(p^\infty)$ или Q, в разложении группы D в прямую сумму групп $Z(p^\infty)$ и Q, очевидно, равно соответственно рангу $r_p(D)$ или рангу $r_0(D)$. По теореме 16.3 эти ранги однозначно определяются группой D. Они образуют полную систему инвариантов, так как если даны $r_p(D)$ и $r_0(D)$, то мы можем по ним однозначно восстановить группу D, взяв прямую сумму $r_p(D)$ групп, изоморфных $Z(p^\infty)$, для каждого p и $r_0(D)$ групп, изоморфных Q. Независимость этих инвариантов очевидна. ∎

Итак, для делимой группы D имеет место разложение

$$D \cong \bigoplus_{r_0(D)} Q \oplus \bigoplus_p [\bigoplus_{r_p(D)} Z(p^\infty)].$$

В силу теорем 21.3 и 23.1 проблема описания строения абелевых групп сводится к случаю редуцированных групп.

Пример 1. Если G — аддитивная группа всех действительных чисел, то G — делимая группа без кручения мощности континуума. Следовательно, $G = \bigoplus_c Q$, где c — мощность континуума.

Пример 2. Пусть

$$K=\prod_p Z(p^\infty),$$

где p пробегает все различные простые числа. Тогда p-компонентой группы K служит $Z(p^\infty)$, а так как K имеет мощность континуума, то

$$K=\bigoplus_p Z(p^\infty)\oplus(\bigoplus_{\mathfrak{c}} Q).$$

Поэтому *группа K изоморфна группе действительных чисел, рассматриваемых по модулю* 1.

Пример 3. Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число. Тогда

$$Z(p^\infty)^{\mathfrak{m}}=\bigoplus_{2^{\mathfrak{m}}}(Z(p^\infty)\oplus Q).$$

В самом деле, это — делимая группа с цоколем мощности $2^{\mathfrak{m}}$, содержащая $2^{\mathfrak{m}}$ независимых элементов бесконечного порядка.

Упражнения

1. Делимые периодические группы изоморфны тогда и только тогда, когда их цоколи изоморфны.

2. Если A, B — делимые группы, каждая из которых содержит подгруппу, изоморфную другой группе, то $A\cong B$.

3. Если A — делимая группа и $A\oplus A\cong B\oplus B$, то $A\cong B$.

4. Если A — бесконечная группа, все собственные подгруппы которой конечны, то $A\cong Z(p^\infty)$ для некоторого p.

5. Группа A является редуцированной тогда и только тогда, когда группа Q не имеет ненулевых гомоморфных образов в A.

6. p-группа является редуцированной тогда и только тогда, когда ее циклические подгруппы удовлетворяют условию максимальности.

7. Пусть D — прямое произведение $\mathfrak{m}$ групп, изоморфных $(Q/Z)^{\mathfrak{n}}$. Определить строение группы D.

8 (Селе [4]). Группа не содержит двух различных изоморфных между собой подгрупп тогда и только тогда, когда она изоморфна подгруппе группы Q/Z.

9 (Кертес [1]). Пусть A есть p-группа, в которой элементы конечной высоты имеют высоту $<m$ для целого числа $m>0$. Тогда A — прямая сумма коциклических групп. [*Указание*: p^mA — делимая группа.]

10. Показать, что любые два прямых разложения делимой группы имеют изоморфные продолжения.

11. Группа A называется *квазиинъективной*, если всякий гомоморфизм любой подгруппы группы A в группу A можно продолжить до эндоморфизма группы A. Доказать, что всякая квазиинъективная группа или инъективна, или является периодической группой, p-компоненты которой — прямые суммы изоморфных между собой циклических групп.

§ 24. Делимая оболочка

Свободные группы в некотором смысле универсальны, именно, всякая группа является эпиморфным образом некоторой свободной группы. Следующий результат показывает, что делимые группы универсальны в двойственном смысле.

Теорема 24.1. *Всякую группу можно вложить в качестве подгруппы в делимую группу.*

Бесконечную циклическую группу Z, очевидно, можно вложить в делимую группу, именно в группу Q. Следовательно, всякая свободная группа F вложима в прямую сумму групп, изоморфных Q, т. е. в делимую группу. Если A — произвольная группа, то можно написать $A \cong F/N$, где F — соответствующая свободная группа. Если вложить группу F в делимую группу D, то группа A окажется изоморфной подгруппе F/N делимой группы D/N. ∎

Эту теорему можно улучшить, установив существование минимальной делимой группы, содержащей заданную группу. Начнем со следующих лемм.

Лемма 24.2. *Подгруппа B группы A является существенной тогда и только тогда, когда гомоморфизм α: $A \to G$ в произвольную группу G обязательно является мономорфизмом, если $\alpha \mid B$: $B \to G$ — мономорфизм.*

Если B — существенная подгруппа группы A и $\alpha \mid B$ — мономорфизм, то $\operatorname{Ker} \alpha \cap B = \operatorname{Ker} (\alpha \mid B) = 0$, откуда $\operatorname{Ker} \alpha = 0$. Обратно, если B — не существенная подгруппа и подгруппа $C \neq 0$ группы A такова, что $C \cap B = 0$, то канонический эпиморфизм α: $A \to A/C$ не является мономорфизмом, хотя $\alpha \mid B$ — мономорфизм. ∎

Для заданной группы A делимая группа E, содержащая A, называется *минимальной делимой группой*, если в E нет собственных делимых подгрупп, содержащих A.

Лемма 24.3. *Делимая группа E, содержащая группу A, является минимальной делимой группой тогда и только тогда, когда A — существенная подгруппа группы E.*

Если E — не минимальная делимая группа и D — собственная делимая подгруппа группы E, содержащая A, то можно написать $E = D \oplus C$, где $C \neq 0$. Так как $A \cap C \subseteq D \cap C = 0$, то группа A не является существенной подгруппой группы E. Обратно, если A — не существенная подгруппа группы E, то в E существует такая циклическая подгруппа $C = \langle c \rangle \neq 0$, что $A \cap C = 0$. Без ограничения общности можно предположить, что $o(c) = \infty$ или $o(c) = p^k$. Тогда подгруппу C можно вложить в такую подгруппу B группы E, что $B \cong Q$ или $B \cong Z(p^\infty)$. По теореме 21.2 $E = D \oplus B$ для некоторой

подгруппы D, содержащей A. Следовательно, группа E — не минимальная. ∎

Теорема 24.4 (Куликов [2]). *Всякая делимая группа, подгруппой которой является группа A, содержит минимальную делимую группу, содержащую A. Любые две минимальные делимые группы, содержащие A, изоморфны над A.*

Пусть D делимая группа, содержащая группу A. Делимые подгруппы группы D, имеющие с A нулевое пересечение, образуют индуктивное множество, поэтому в этом множестве существует максимальный член M. По теореме 21.2 имеем $D = M \oplus E$, где $A \subseteq E$. Очевидно, E — делимая группа, а из максимальности подгруппы M следует, что E не может содержать собственных прямых слагаемых и, таким образом, собственных делимых подгрупп, все еще содержащих A. Следовательно, E — минимальная делимая подгруппа, содержащая A.

Если E_1, E_2 — две минимальные делимые группы, содержащие группу A, то в силу теоремы 21.1 тождественный автоморфизм 1_A группы A можно продолжить до гомоморфизма η: $E_1 \to E_2$. Так как ηE_1 — делимая группа, содержащая A, то η — эпиморфизм. По лемме 24.3 группа A — существенная подгруппа группы E_1, а так как $\eta \mid A = 1_A$, то из леммы 24.2 следует, что η — мономорфизм. Следовательно, η является изоморфизмом между группами E_1 и E_2, оставляющим каждый элемент группы A на месте. ∎

В силу последней теоремы минимальную делимую группу E, содержащую группу A, мы вправе назвать *делимой оболочкой* [или *инъективной оболочкой*] группы A. Очевидно, из леммы 24.3 следует, что

$$r_0(E) = r_0(A) \text{ и } r_p(E) = r_p(A) \text{ для любого простого числа } p.$$

Таким образом, строение делимой оболочки группы A полностью определяется рангами группы A.

Результаты этого параграфа позволяют доказать утверждения, обратные теоремам 21.1 и 21.2.

Теорема 24.5. *Для группы D эквивалентны следующие условия:*

1) *D — делимая группа;*
2) *D — инъективная группа;*
3) *D служит прямым слагаемым для всякой содержащей ее группы.*

Нужно только проверить, что из условия 3) следует 1). Вложим группу D в делимую группу E. Из условия 3) вытекает, что D служит для E прямым слагаемым. Следовательно, имеет место условие 1). ∎

Точную последовательность

$$0 \to A \to D \to D' \to 0,$$

где D [и, следовательно, D']— делимая группа, существование которой для любой группы A обеспечивается теоремой 24.1, иногда бывает удобно называть *делимой* или *инъективной резольвентой* группы A.

Наконец, приведем еще одну теорему, главным образом потому, что ее можно теперь доказать и в ее доказательстве используются делимые группы. Будет удобно иметь ее для ссылок.

Предложение 24.6. *Если C — такая подгруппа группы B, что факторгруппа B/C изоморфна подгруппе H группы G, то существует такая содержащая B группа A, что $A/C \cong G$.*

Пусть D — делимая группа, содержащая группу B. Тогда D/C содержит B/C, и если B/C нельзя расширить внутри группы D/C до группы, изоморфной G, то мы всегда можем найти такую делимую группу E, что в $D/C \oplus E$ такое расширение возможно. Если группа A/C изоморфна G и содержит $B/C \cong H$, то A ($\subseteq D \oplus E$) — группа с нужным свойством. ∎

То, о чем шла речь в предложении 24.6, можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C & \to & B & \to & H & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & C & \to & A & \to & G & \to & 0 \end{array}$$

где строки точны, а вертикальные отображения — вложения.

Упражнения

1. Пусть A — группа без кручения, E — множество всех пар (a, m), где $a \in A$, m — натуральное число и

$$(a, m) = (b, n) \text{ тогда и только тогда, когда } mb = na.$$

Пусть, далее,

$$(a, m) + (b, n) = (na + mb, mn).$$

Показать, что E — минимальная делимая группа, содержащая образ мономорфизма $a \mapsto (a, 1)$ $(a \in A)$.

2. Делимая оболочка группы A является делимой оболочкой подгруппы B группы A тогда и только тогда, когда B — существенная подгруппа группы A.

3. (а) Делимая группа D, содержащая группу A, минимальна в точности тогда, когда D/A — периодическая группа и A содержит цоколь группы D.

(б) Если D — делимая оболочка p-делимой группы A, то факторгруппа D/A имеет нулевую p-компоненту.

4 (Кертес [2]). (а) Если группа A является эндоморфным образом всякой группы, содержащей A, то A — делимая группа.

(б) Если группа A служит прямым слагаемым для всякой содержащей ее группы, эндоморфным образом которой она является, то A — делимая группа.

5 (Кертес [2]). Пусть A — такая группа, что если A — эндоморфный образ группы B, то B содержит прямое слагаемое, изоморфное группе A. Показать, что A — прямая сумма делимой группы и свободной группы.

6. Если группа A служит прямым слагаемым для всякой такой содержащей ее группы G, что G/A — квазициклическая группа, то A — делимая группа.

7 (Длаб [2]). Всякая группа служит подгруппой Фраттини для некоторой группы.

8* (Шарль [2], Кхаббаз [2]). Подгруппа A делимой группы D является пересечением делимых подгрупп группы D тогда и только тогда, когда $A[p] = D[p]$ влечет $pA = A$ для любого простого числа p.

9. Пусть A_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — счетная система групп. Проверить, что существуют такие делимые группы D_n и такая последовательность

$$\ldots \longrightarrow D_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} D_n \xrightarrow{\alpha_n} D_{n+1} \longrightarrow \ldots,$$

что $\alpha_n \alpha_{n-1} = 0$ и $\operatorname{Ker} \alpha_n / \operatorname{Im} \alpha_{n-1} \cong A_n$ для любого n.

10 (Селе [2]). Назовем элемент $a \in A$ *алгебраическим* над подгруппой B группы A, если $a=0$ или $\langle a \rangle \cap B \neq 0$. Если каждый элемент $a \in A$ является алгебраическим над B, то назовем группу A *алгебраической* над B.

(а) Группа A является алгебраической над B тогда и только тогда, когда B — существенная подгруппа группы A.

(б) Группа A есть максимальное алгебраическое расширение группы B [т. е. никакая группа, содержащая A в качестве собственной подгруппы, уже не является алгебраическим расширением группы B] тогда и только тогда, когда A — делимая оболочка группы B.

11 (Селе [2]). (а) Если $B \subseteq A$, то в группе A существует алгебраическое расширение C подгруппы B, максимальное среди всех алгебраических расширений подгруппы B в A.

(б) Используя п. (а) и упражнение 10, доказать, что всякая делимая группа, содержащая группу B, содержит делимую оболочку группы B.

12 (Уокер Э. [4]). Группа G называется *n-расширением* группы A, если G — такое существенное расширение группы A, что $A = nG$.

(а) Если G есть n-расширение группы A, то существует делимая оболочка D группы A, содержащая G.

(б) Если G и G' являются n-расширениями группы A и $G \subseteq G'$, то $G = G'$.

(в) Доказать, что для любой заданной группы A существует n-расширение, доказав предварительно, что $(D/A)[n] = G/A$ определяет такую группу G, что $nG = A$.

(г) Любые два n-расширения группы A изоморфны над A.

(д) Всякая группа H, для которой $nH = A$, содержит n-расширение группы A.

§ 25. Конечно копорожденные группы

Отмеченная нами двойственность между свободными и делимыми группами порождает понятие, двойственное понятию конечно порожденной группы.

Система L элементов группы A называется *системой кообразующих*, если для любой группы B всякий гомоморфизм φ: $A \to B$, для которого $L \cap \operatorname{Ker} \varphi = \varnothing$ или $=0$, является мономорфизмом. Это, очевидно, эквивалентно тому, что всякая ненулевая подгруппа группы A содержит ненулевой элемент из L. Ясно, что подгруппа $\langle L \rangle$ должна быть существенной подгруппой группы A, и существенная подгруппа всегда является системой кообразующих. То, что было сказано, когда вводилось понятие коциклических групп (в § 3), показывает, что кообразующие двойственны образующим.

Группа называется *конечно копорожденной*, если она обладает конечной системой кообразующих. Следующий результат является аналогом теоремы 15.5 и выявляет замечательную двойственность между условием максимальности и условием минимальности.

Теорема 25.1 (Курош [1], Яхья [1]). *Для группы A эквивалентны следующие условия:*

1) *A — конечно копорожденная группа;*
2) *A — существенное расширение конечной группы;*
3) *A — прямая сумма конечного числа коциклических групп;*
4) *подгруппы группы A удовлетворяют условию минимальности.*

Пусть выполнено условие 1), и пусть L — конечная система кообразующих группы A. В группе A нет элементов бесконечного порядка, так как иначе в циклической группе, порожденной элементом бесконечного порядка, можно было бы выбрать ненулевую подгруппу, не содержащую ни одного отличного от нуля элемента из L. Следовательно, L — конечная система элементов конечных порядков, откуда $\langle L \rangle$ — конечная подгруппа. Так как A — существенное расширение подгруппы $\langle L \rangle$, то отсюда вытекает 2).

Пусть теперь выполнено условие 2), т. е. A — существенное расширение конечной подгруппы B. Очевидно, A является периодической группой с конечным числом p-компонент, и, чтобы доказать 3), мы можем предположить, что A и B — это p-группы. Так как $A[p] = B[p]$ — конечная группа, то для фиксированного элемента $a \in A$ уравнение $px = a$ может иметь не более конечного числа решений в группе A. Если $h(a) = \infty$, то решения $x_1, \ldots, x_k$ не могут все иметь конечную высоту, так как если для элемента $y \in A$ выполнено равенство $p^n y = a$, то $p^{n-1}y$ — это один из элементов $x_1, \ldots, x_k$. Следовательно, начав с элемента $a \in A[p]$ бесконечной высоты, мы можем построить квазициклическую подгруппу группы A. Объединение D всех квазициклических подгрупп группы A является делимой подгруппой, поэтому $A = D \oplus C$. Так как $C[p]$ — конечная группа,

то существует (конечный) максимум m высот ее элементов, и, таким образом, $p^{m+1}C = 0$. Следовательно, A — прямая сумма коциклических групп, где число слагаемых конечно в силу конечности цоколя группы A.

Покажем теперь, что из 3) следует 4). Если $r(A) = 1$, т. е. $A = Z(p^k)$, где $1 \leqslant k \leqslant \infty$, то утверждение очевидно. Для $r(A) = n > 1$ доказательство проведем по индукции. Предположим, что в группах ранга $\leqslant n - 1$ условие минимальности выполнено. Пусть $A = Z(p^k) \oplus B$, где $r(B) = n - 1$, и пусть $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$ — убывающая последовательность подгрупп группы A. Тогда $B \cap G_1 \supseteq B \cap G_2 \supseteq \ldots$ и, начиная с некоторого номера m, имеем $B \cap G_m = B \cap G_{m+1} = \ldots$. Из соотношений

$$G_i/(B \cap G_m) = G_i/(B \cap G_i) \cong (B + G_i)/B \subseteq A/B = Z(p^k) \quad (i \geqslant m)$$

следует, что группы $G_i/(B \cap G_m)$, а тогда и группы G_i, начиная с некоторого индекса, совпадают. Этим условие 4) доказано.

Наконец, предположим, что выполнено условие 4). Группа A не содержит элементов бесконечного порядка, так как если a — такой элемент, то $\langle 2^n a \rangle$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — строго убывающая последовательность подгрупп группы A. Так как цоколь группы A не может быть бесконечной прямой суммой, то $S(A)$ — конечная подгруппа. Следовательно, группа A обладает конечной системой кообразующих. ∎

Заметим, что из эквивалентности условий 1) и 4) следует, что факторгруппы конечно копорожденных групп являются конечно копорожденными группами. Отметим также, что условие 2) эквивалентно конечности цоколя.

В заключение докажем следующий простой результат.

Предложение 25.2. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — конечное множество ненулевых элементов группы A и M — подгруппа группы A, максимальная относительно того свойства, что она не содержит ни одного из элементов $a_1, \ldots, a_n$. Тогда в факторгруппе A/M выполнено условие минимальности для подгрупп. Если $n = 1$, то A/M — коциклическая группа.*

Всякая подгруппа группы A, строго содержащая M, содержит хотя бы один из элементов $a_1, \ldots, a_n$. Другими словами, всякая ненулевая подгруппа группы A/M содержит один из элементов $a_1 + M, \ldots, a_n + M$, т. е. $a_1 + M, \ldots, a_n + M$ — система кообразующих группы A/M. Остается применить предыдущую теорему. ∎

Заметим, что из предложения 25.2 вытекает, что всякая группа является хаусдорфовой в прюферовой топологии.

Упражнения

1. Подпрямая сумма конечного числа групп с условием минимальности удовлетворяет условию минимальности.

2. Если в подгруппе B группы A и в факторгруппе A/B выполнено условие минимальности, то оно выполнено и в группе A.

3. В p-группе условие минимальности выполнено тогда и только тогда, когда ее ранг конечен.

4. Если η — эндоморфизм группы с условием минимальности и $\operatorname{Ker} \eta = 0$, то η — автоморфизм.

5. Определить строение групп, содержащих не более конечного числа элементов любого фиксированного порядка.

6. (а) Охарактеризовать группы, в которых множество конечно порожденных подгрупп удовлетворяет условию минимальности.

(б) Двойственно этому, описать группы, в которых множество подгрупп с условием минимальности удовлетворяет условию максимальности.

7. Множество эндоморфных образов группы удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда группа является прямой суммой конечного числа групп Q и $Z(p^k)$ ($k = 1, 2, \ldots, \infty$). [*Указание*: рассмотреть подгруппы nA.]

8. Множество вполне характеристических подгрупп группы удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда группа является прямой суммой групп Q, групп $Z(p^\infty)$ для конечного числа различных простых чисел p и групп $Z(p^k)$, где $p^k \mid m$ для фиксированного m.

Замечания

Инъективность и существование инъективных оболочек были открыты Бэром [3]. Он доказал также, что для инъективности R-модуля M необходимо и достаточно, чтобы каждый гомоморфизм любого левого идеала L кольца R в M продолжался до R-гомоморфизма $R \to M$. Это свойство продолжаемости, где в качестве L берутся только главные левые идеалы кольца R, есть, может быть, наиболее подходящий способ определить делимость R-модуля M. Тогда сразу получается, что инъективный модуль обязательно является делимым. Для модулей над коммутативными областями целостиости R эквивалентность инъективности и делимости характеризует дедекиндовы кольца [см. Картан и Эйленберг [1]]. Для модулей без кручения над областями Оре из делимости всегда вытекает инъективность.

Эпиморфные образы инъективных R-модулей сами инъективны тогда и только тогда, когда кольцо R наследственно слева. Важно заметить, что коммутативная область целостности наследствениа в точности тогда, когда она — дедекиндово кольцо.

Результаты § 22 верны вообще для инъективных модулей. Заметим, что полупростые артиновы кольца [регулярные кольца в смысле фон Неймана] характеризуются тем свойством, что все модули над ними инъективны [делимы].

Легко показать, что иад кольцами, нётеровыми слева, всякий модуль имеет максимальный инъективный подмодуль. Он не обязательно однозначно определен, кроме случая, когда кольцо, кроме того, наследственно слева. Матлис [Matlis E., *Pacif. J. Math.*, 8 (1958), 511—528] и Папп [Papp Z., *Publicationes Math. Debrecen*, 6 (1959), 311—327] доказали, что всякий инъективный модуль над нётеровым слева кольцом R является прямой суммой неразложимых модулей. Если, кроме того, кольцо R коммутативно, то неразложимые R-модули находятся во взаимно однозначном соответствии с простыми идеалами P кольца R, именно, они служат инъективными оболочками для R/P [при $R = Z$ нужно брать $P = (0)$ или $P = (p)$]; см. Матлис [*там же*]. Замечательным фактом является то

что прямые суммы (и прямые пределы) инъективных модулей снова инъективны тогда и только тогда, когда кольцо нётерово слева. Это было отмечено Матлисом и Паппом.

Проблема 12. Какие группы а) инъективны, б) проективны над своими кольцами эндоморфизмов? в) Найти проективную, инъективную и слабую размерность группы над ее кольцом эндоморфизмов.

См.: Douglas A. and Farahat H., *Monatshefte Math.*, **69** (1965), 294—305, и Richman F. and Walker E., *Math. Z.*, **89** (1965), 77—81.

Глава V

СЕРВАНТНЫЕ ПОДГРУППЫ

Понятие сервантной подгруппы было введено Прюфером [2]. В настоящее время оно стало одним из важнейших в теории абелевых групп. Сервантные подгруппы являются промежуточными между просто подгруппами и прямыми слагаемыми; они отражают то, как подгруппа вложена в группу. Понятие сервантной подгруппы является достаточно общим, что обеспечивает существование достаточного запаса сервантных подгрупп, и вместе с тем сервантные подгруппы обладают многими хорошими свойствами. Значение сервантных подгрупп заключается также в той методологической роли, которую они играют при доказательстве существования прямых слагаемых; именно, легко устанавливается существование сервантных подгрупп того или иного типа, и имеются различные критерии, при выполнении которых некоторые сервантные подгруппы выделяются прямыми слагаемыми.

Если рассматривать только такие точные последовательности, какие мы будем называть сервантно точными, то возникает новое замечательное понятие сервантной инъективности [которое будет рассматриваться в гл. VII].

§ 26. Сервантность

Подгруппа G группы A называется *сервантной*, если уравнение $nx = g \in G$, имеющее решение во всей группе A, имеет решение и в G. Это означает, что подгруппа G сервантна в A, если из $n \mid g$ в группе A вытекает $n \mid g$ в G. Так как $n \mid g$ в группе G эквивалентно тому, что $g \in nG$, то подгруппа G сервантна в группе A тогда и только тогда, когда

$$nG = G \cap nA \quad \text{для любого } n \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Если в группах A и G введена Z-адическая топология, то из (1), очевидно, вытекает, что *для сервантной подгруппы относительная Z-адическая топология и ее собственная Z-адическая топология совпадают.*

Естественным обобщением понятия сервантности является понятие p-сервантности. Подгруппа G группы A называется *p-сервантной* (p — простое число), если

$$p^kG = G \cap p^k A, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

или, другими словами, если p-высоты элементов из G одинаковы в G и в A. Для p-сервантных подгрупп относительные p-адические топологии совпадают с их собственными p-адическими топологиями.

Если G является p-сервантной подгруппой группы A при каждом простом числе p, то G сервантна в A. В самом деле, если $n = p_1^{r_1} \ldots$

$\ldots p_k^{r_k}$ — каноническое разложение числа n, то

$$nG = p_1^{r_1}G \cap \ldots \cap p_k^{r_k}G = (G \cap p_1^{r_1}A) \cap \ldots \cap (G \cap p_k^{r_k}A) = \\ = G \cap (p_1^{r_1}A \cap \ldots \cap p_k^{r_k}A) = G \cap nA.$$

Приведем теперь некоторые основные факты, касающиеся сервантных подгрупп:

а) Всякое прямое слагаемое является сервантной подгруппой, 0 и A — (тривиальные) сервантные подгруппы группы A.

б) Периодическая часть смешанной группы и ее p-компоненты являются сервантными подгруппами [но не обязательно — прямыми слагаемыми].

в) Подгруппы групп Q и $Z(p^\infty)$ не имеют нетривиальных сервантных подгрупп.

г) Если A/G — группа без кручения, то G — сервантная подгруппа группы A. В самом деле, из $na = g \in G$ $(n \neq 0)$ для $a \in A$ вытекает $a \in G$.

д) *В группах без кручения пересечения сервантных подгрупп снова сервантны.*

Действительно, уравнение $nx = g$ имеет не более одного решения. Поэтому если это уравнение имеет решение в группе A, то его единственное решение принадлежит каждой сервантной подгруппе, содержащей элемент g.

Ввиду этого в группе без кручения A для всякого подмножества S существует минимальная сервантная подгруппа, содержащая S, именно пересечение $\langle S \rangle_*$ всех сервантных подгрупп группы A, содержащих S. Эта подгруппа называется *сервантной подгруппой, порожденной множеством* S. Легко проверить, что $\langle S \rangle_*$ представляет собой множество всех элементов группы A, зависящих от S.

е) *Сервантность является индуктивным свойством.*

Пусть $G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_i \subseteq \ldots$ — цепочка сервантных подгрупп G_i группы A, и пусть G — объединение этих подгрупп. Если уравнение $nx = g \in G$ имеет решение в группе A и j — такой индекс, что $g \in G_j$, то уравнение $nx = g$ имеет решение в G_j, а значит и в G.

Аналогично доказывается, что p-сервантность — индуктивное свойство.

ж) *p-сервантная p-подгруппа всегда сервантна.*

Это сразу следует из равенства $qG = G$, верного для любой p-группы G и любого простого числа $q \neq p$.

з) *Если A есть p-группа и элементы порядка p ее подгруппы G имеют одинаковую высоту в G и в A, то G — сервантная подгруппа группы A.*

Чтобы доказать, что любой элемент $g \in G$ имеет в G и в A одинаковую высоту, применим индукцию по $e(g) = n$. Для $e(g) = 1$ это выполнено по условию. Пусть это верно для элементов экспоненты $< n$, где $n \geqslant 2$. Если $e(g) = n$ и для некоторого $a \in A$ выполнено равенство $p^k a = g$, то по индуктивному предположению $p^{k+1}h = pg$ для

некоторого $h \in G$. Здесь $p^k h - g$ или равно 0, или имеет порядок p, причем $p^k(h-a) = p^k h - g$. По предположению $p^k g' = p^k h - g$ для некоторого $g' \in G$. Отсюда $p^k(h - g') = g$. Таким образом, высота элемента $g \in G$ в группе G не меньше, чем в A.

и) *Если A есть p-группа, G — ее сервантная подгруппа и $G[p] = A[p]$, то $G = A$.*

Докажем снова индукцией по $e(a) = n$, что каждый элемент $a \in A$ лежит в G. Предположим, что $e(a) = n \geqslant 2$. Тогда из включения $p^{n-1}a \in A[p] = G[p]$ следует в силу сервантности подгруппы G, что $p^{n-1}g = p^{n-1}a$ для некоторого $g \in G$. Здесь $e(g-a) \leqslant n-1$, поэтому, согласно индуктивному предположению, $g - a \in G$, откуда $a \in G$.

Мы будем часто пользоваться следующей леммой:

Лемма 26.1 (Прюфер [2]). *Пусть B, C — такие подгруппы группы A, что $C \subseteq B \subseteq A$. Тогда*

1) *если подгруппа C сервантна в B, а подгруппа B сервантна в A, то подгруппа C сервантна в A;*

2) *если подгруппа B сервантна в A, то подгруппа B/C сервантна в A/C;*

3) *если подгруппа C сервантна в A и подгруппа B/C сервантна в A/C, то подгруппа B сервантна в A.*

При предположениях п. 1)

$$nC = C \cap nB = C \cap (B \cap nA) = (C \cap B) \cap nA = C \cap nA$$

для любого $n > 0$, что доказывает сервантность подгруппы C в A. Утверждение 2) вытекает из равенств

$$n(B/C) = (nB + C)/C = ((B \cap nA) + C)/C = (B \cap (nA + C))/C = \\ = (B/C) \cap n(A/C).$$

Предположим, что выполнены условия п. 3), и пусть $na = b \in B$ для некоторого $a \in A$ и некоторого $n > 0$. Тогда $n(a + C) = b + C$, и по предположению для некоторого $b' \in B$ имеет место равенство $n(b' + C) = b + C$. Из $nb' = b + c$ $(c \in C)$ получаем $n(b' - a) = c$. Следовательно, $nc' = c$ для некоторого $c' \in C$. Наконец, $n(b' - c') = b$, где $b' - c' \in B$, что завершает доказательство. ∎

В силу утверждений 2) и 3) *естественное соответствие между подгруппами группы A/C и подгруппами группы A, содержащими сервантную подгруппу C, сохраняет сервантность.*

Результатом другого рода является

Предложение 26.2 (Селе). *Всякую бесконечную подгруппу можно вложить в сервантную подгруппу той же мощности, а всякую конечную подгруппу — в счетную сервантную подгруппу.*

Пусть B — подгруппа группы A, и пусть $|B| = \mathfrak{m}$. Рассмотрим все уравнения $nx = b \in B$, имеющие решение в группе A. Для всякого такого уравнения добавим к B решение $a_{n,b} \in A$ и получим подгруппу

B_1 группы A, в которой все такие уравнения над B имеют решение [т. е. подгруппа B_1 порождается подгруппой B и всеми этими элементами $a_{n,b}$]. Затем повторим этот процесс, заменив B на B_1, и получим подгруппу B_2, в которой имеют решение все уравнения с правой частью из B_1, имеющие решение в группе A. Объединение G подгрупп B_i ($i = 1, 2, \ldots$) является сервантной подгруппой группы A, так как уравнение $nx = g \in G$ имеет решение в B_{i+1}, если $g \in B_i$, и это уравнение имеет решение в группе A. Очевидно, $|G| \leqslant m\aleph_0$, и обе части предложения 26.2 доказаны. ■

Для групп без кручения предложение 26.2 может быть усилено: в этом случае любую подгруппу можно вложить в сервантную подгруппу того же ранга, именно в сервантную подгруппу, ею порожденную.

Можно определить сервантность для p-адических модулей, заменив в (1) натуральные числа n целыми p-адическими числами. Так как умножение на единицы не меняет подмодули в целом, то нужно рассматривать только степени p. Поэтому для p-адических модулей определение сервантности [и p-сервантности] задается условием 2).

Упражнения

1. Если $G \cap H$ и $G + H$ — сервантные подгруппы группы A, то G и H — также сервантные подгруппы.

2. (а) Ни пересечение, ни объединение прямых слагаемых не обязано быть сервантной подгруппой.

(б) Если G — сервантная подгруппа каждой группы, входящей в цепь $\ldots \subseteq B_i \subseteq \ldots$, то подгруппа G сервантна в $\bigcup B_i$.

3. К-прямая сумма групп сервантна в их прямом произведении.

4. Если подгруппа G сервантна в группе A, то подгруппа nG сервантна в nA.

5. Если T — периодическая часть группы A и G — сервантная подгруппа в A, то подгруппа $T + G$ сервантна в A.

6. Если G — сервантная подгруппа группы A, то
(а) $G^1 = G \cap A^1$ (G^1, A^1 — первые ульмовские подгруппы);
(б) $(G + A^1)/A^1$ — сервантная подгруппа группы A/A^1;
(в) если $G \subseteq A^1$, то G — делимая группа.

7. Привести пример несервантной подгруппы, Z-адическая топология в которой совпадает с относительной Z-адической топологией.

8. Единственной существенной сервантной подгруппой группы A является сама группа A.

9. Данная группа сервантна во всякой содержащей ее группе тогда и только тогда, когда она — делимая группа.

10. Если в счетной p-группе A элементы бесконечной высоты образуют сервантную подгруппу, то A — прямая сумма коциклических групп. [*Указание*: см. упражнение 6 (в) и теоремы 17.3 и 23.1.]

11. Для всякой сервантной подгруппы B группы A существует такая вполне упорядоченная возрастающая цепочка

$$B = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_\sigma \subset \ldots \subset B_\tau = A \quad (\sigma < \tau)$$

сервантных подгрупп группы A, что для любого $\sigma < \tau$ факторгруппа $B_{\sigma+1}/B_\sigma$ счетна и $B_\sigma = \bigcup_{\rho<\sigma} B_\rho$, если σ — предельное порядковое число.

12 (Ирвин [1]). Пусть A^1 — первая ульмовская подгруппа группы A и H является A^1-высокой подгруппой в A. Доказать, что

(а) подгруппа H сервантна в A. [*Указание*: выбрать минимальное n, для которого равенство $p^n a = h \in H$ выполняется при некотором $a \in A$, но не выполняется ни при каком $a \in H$, и рассмотреть $A^1 \cap \langle p^{n-1}a, H \rangle$.]

(б) A/H — делимая группа.

(в) A/H — делимая оболочка группы $(A^1 \oplus H)/H \cong A^1$.

13. (а) (Шарль [3], Ирвин [1]) Пусть A есть p-группа и B — бесконечная подгруппа группы A, не содержащая элементов бесконечной высоты. Тогда существует такая сервантная подгруппа C группы A, что 1) $B \subseteq C$, 2) $|B| = |C|$, 3) подгруппа C не содержит элементов бесконечной высоты. [*Указание*: см. упр. 12.]

(б) (Ирвин и Уокер [1]) Доказать утверждение (а) для произвольных групп.

14. Доказать аналог предложения 24.6, заменив везде слово «подгруппа» словами «сервантная подгруппа».

§ 27. Ограниченные сервантные подгруппы

Результаты этого параграфа имеют исключительное значение: они, вероятно, являются наиболее часто цитируемыми в теории p-групп.

Предложение 27.1 (Селе [6]). *Предположим, что подгруппа B группы A является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^k. Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

а) *B — сервантная [p-сервантная] подгруппа группы A*;
б) *для B выполнено равенство $B \cap p^k A = 0$*;
в) *B — прямое слагаемое группы A.*

Если B есть p-сервантная подгруппа группы A, то $B \cap p^m A = p^m B$ для любого целого числа $m > 0$, в частности для $m = k$, когда $p^k B = 0$. Следовательно, из п. а) вытекает б). Пусть выполнено условие б), и пусть C — такая B-высокая подгруппа группы A, что $p^k A \subseteq C$. Если для некоторого $a \in A$ имеет место равенство $pa = b + c$ $(b \in B,\ c \in C)$, то $p^k a = p^{k-1} b + p^{k-1} c$, откуда $p^{k-1} b = 0$, так как $p^k a \in C$. Из предположения относительно строения группы B следует, что существует такой элемент $b' \in B$, что $pb' = b$. Теперь простое использование леммы 9.9 и того факта, что $qB = B$ для всех простых чисел $q \neq p$, показывает, что $A = B \oplus C$, т. е. выполнено в). Тот факт, что из в) следует а), очевиден. ∎

Следствие 27.2 (Куликов [1]). *Всякий элемент порядка p и конечной высоты можно вложить в конечное циклическое прямое слагаемое группы.*

Пусть элемент $a \in A$ имеет порядок p и высоту $k < \infty$, и пусть $p^k b = a$. Тогда $\langle b \rangle$ — сервантная подгруппа конечного порядка, и можно применить предложение 27.1. ∎

Следствие 27.3 (Куликов [1]). *Если группа содержит элементы конечного порядка, то она обладает коциклическим прямым слагаемым.*

Если для некоторого p группа содержит подгруппу $Z(p^\infty)$, то эта подгруппа выделяется прямым слагаемым. Если группа не содержит подгрупп вида $Z(p^\infty)$, но содержит элементы порядка p, то она содержит и элемент порядка p конечной высоты [см. § 20, B)]. Остается применить следствие 27.2. ∎

Следствие 27.4 (Куликов [1]). *Прямо неразложимые группы являются или группами без кручения, или коциклическими группами.* ∎

Покажем теперь, что сервантные подгруппы определенных типов обязательно выделяются прямыми слагаемыми.

Теорема 27.5 (Куликов [1]). *Всякая ограниченная сервантная подгруппа является прямым слагаемым.*

Если B — ограниченная группа, то в силу теоремы 17.2 можно написать $B = B_1 \oplus C$, где B_1 — прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^k, а в C наименьшая верхняя грань порядков элементов меньше соответствующей грани для группы B. Если B — сервантная подгруппа группы A, то и подгруппа B_1 сервантна в A, и из предложения 27.1 следует, что $A = B_1 \oplus A_1$. Отсюда $B = B_1 \oplus C_1$, где $C_1 = B \cap A_1 \cong C$. Здесь C_1 — сервантная подгруппа группы A_1, и по индуктивному предположению C_1 — прямое слагаемое группы A_1. Следовательно, B — прямое слагаемое группы A. ∎

Следствие 27.6. *Всякая конечно копорожденная сервантная подгруппа выделяется прямым слагаемым.* ∎

Из теоремы 27.5 можно также вывести следующий полезный результат.

Теорема 27.7 (Кхаббаз [1]). *Для любого простого числа p и натурального n всякая p^nA-высокая подгруппа группы A слижит для A прямым слагаемым.*

Пусть B есть p^nA-высокая подгруппа группы A. Тогда $p^nB \subseteq B \cap p^nA = 0$, т. е. B—ограниченная p-группа. Проверим, что B — сервантная подгруппа группы A. Для этого покажем, что $B \cap p^kA \subseteq p^kB$ при любом целом $k \geqslant 0$. Для $k=0$ это выполняется тривиальным образом. Применим индукцию по k. Если $b = p^{k+1}a \neq 0$ $(b \in B,\ a \in A)$, то по лемме 9.8 $p^ka \in p^nA \oplus B$, т. е. $p^ka = p^nc + d$ для некоторых $c \in A$, $d \in B$. Так как $p^na \in p^nA$, то $k \leqslant n-1$. Поэтому $d = p^ka - p^nc$ принадлежит подгруппе $B \cap p^kA$, которая равна p^kB в силу индуктивного предположения. Следовательно, $b = p^{k+1}a = p^{n+1}c + pd$ дает

$b = pd \in p^{k+1}B$. Таким образом, B — ограниченная сервантная подгруппа группы A. Остается применить теорему 27.5. ∎

Следствие 27.8 (Эрдели [1]). *p-подгруппу B группы A можно вложить в ограниченное прямое слагаемое группы A тогда и только тогда, когда высоты отличных от нуля элементов группы B [взятые в группе A] ограничены.*

Так как необходимость очевидна, предположим, что m — верхняя грань высот элементов в B. Выберем $p^{m+1}A$-высокую подгруппу C группы A, для которой $B \subseteq C$, и применим предыдущую теорему. Тогда получится, что C — ограниченное прямое слагаемое, содержащее подгруппу B. ∎

Следствие 27.9. *Элемент a, порядок которого — степень простого числа, принадлежит конечному прямому слагаемому группы тогда и только тогда, когда подгруппа $\langle a \rangle$ не содержит отличных от нуля элементов бесконечной высоты.*

Нужно проверить только достаточность условия. Если элемент a обладает указанными свойствами, то положим $B = \langle a \rangle$, применим следствие 27.8 и вложим B в ограниченное прямое слагаемое C группы A. Подгруппа B содержится в конечном прямом слагаемом группы C, так как C — прямая сумма циклических групп. ∎

Закончим этот параграф следующей характеризацией сервантности.

Теорема 27.10. *Для подгруппы B группы A эквивалентны следующие условия:*

1) *подгруппа B сервантна в A;*

2) *B/nB — прямое слагаемое группы A/nB для любого $n > 0$;*

3) *если $C \subseteq B$ и B/C — конечно копорожденная группа, то B/C — прямое слагаемое группы A/C.*

Если выполнено 1), то из п. 2) леммы 26.1 получается, что B/nB — сервантная подгруппа группы A/nB, так что 2) сразу следует из теоремы 27.5. Предположим, что выполнено условие 2), и пусть C — подгруппа со свойством, указанным в п. 3). Очевидно, можно ограничиться случаем, когда группа B/C редуцированная, что равносильно конечности B/C [см. теорему 25.1]. Тогда существует целое число $n > 0$, для которого $nB \subseteq C$, и по предположению B/nB — прямое слагаемое группы A/nB. Здесь C/nB содержится в B/nB. Переходя к факторгруппе по C, получаем, что B/C — прямое слагаемое для A/C. Пусть, наконец, выполнено условие 3). Если уравнение $nx = b \in B$ имеет решение в группе A, но не имеет решения в B, то $b \notin nB$. Пусть C — подгруппа группы B, содержащая nB и максимальная среди подгрупп, не содержащих b. Тогда по предложению 25.2 B/C — коциклическая группа. По предположению B/C — прямое слагаемое группы A/C. Так как $b + C$ $(\neq C)$ делится на n, а $n(B/C) = 0$, получаем противоречие. Этим доказано, что выполнено условие 1). ∎

Очевидно, в п. 3) требование конечной копорождаемости может быть заменено требованием конечности.

Ясно, как нужно изменить указанные выше условия, чтобы охарактеризовать не сервантность, а p-сервантность.

Упражнения

1. Если редуцированная p-группа содержит элементы сколь угодно больших порядков, то она обладает также циклическими прямыми слагаемыми сколь угодно больших порядков.

2. Прямые суммы неразложимых p-групп могут быть охарактеризованы с помощью инвариантов, являющихся кардинальными числами.

3. Всякое прямое слагаемое прямой суммы неразложимых p-групп само является прямой суммой неразложимых групп.

4 (Куликов [1]). Любые два прямых разложения группы, являющейся прямой суммой неразложимых p-групп, обладают изоморфными продолжениями.

5. Если A — ограниченная группа и B — подгруппа группы $A[p]$, то A обладает таким прямым слагаемым C, что $C[p] = B$.

6. Описать группы, в которых любая подгруппа сервантна.

7. Назовем группу *сервантно простой*, если она не имеет нетривиальных сервантных подгрупп. Доказать, что группа является сервантно простой тогда и только тогда, когда она изоморфна подгруппе групп Q или $Z(p^\infty)$.

8. (а) В группе выполняется условие максимальности [минимальности] для сервантных подгрупп тогда и только тогда, когда эта группа имеет конечный ранг.

(б) В группе A конечного ранга r всякая (не содержащая повторений) цепь сервантных подгрупп может быть вложена в максимальную цепь с этим свойством, и максимальная цепь сервантных подгрупп имеет длину r.

9 (Де Гроот [1]). Если A и B — прямые суммы коциклических групп и каждая из них изоморфна сервантной подгруппе другой, то $A \cong B$. [*Указание*: для редуцированных групп A, B вести рассуждение как в теореме 17.4.]

10 (Уокер Э. [4]). Если A_n — максимальная n-ограниченная сервантная подгруппа группы A, то $A = A_n \oplus A_n^*$ для некоторой подгруппы A_n^* группы A, служащей n-расширением для группы nA (см. § 24, упр. 12).

11 (Катлер [1], Уокер Э. [4]). Если для групп A и B при некотором натуральном n имеет место $nA \cong nB$, то существуют такие группы A' и B', что

$$nA' = nB' = 0 \quad \text{и} \quad A \oplus A' \cong B \oplus B'.$$

[*Указание*: взять в качестве A', B' максимальные n-ограниченные сервантные подгруппы групп B и A соответственно.]

12. Если G — сервантная подгруппа группы $A = B \oplus C$, причем $G \cap C$ является существенной подгруппой и в C, и в G, то $A = B \oplus G$.

§ 28. Факторгруппы по сервантным подгруппам

До сих пор мы имели дело с условиями, при которых сервантные подгруппы выделяются прямыми слагаемыми, связанными с самими сервантными подгруппами. Теперь будут рассматриваться условия, преследующие ту же цель, но связанные с тем, как сервантная подгруппа вложена в группу.

Начнем со следующей часто используемой характеризации сервантности.

Теорема 28.1 (Прюфер [2]). *Подгруппа B группы A сервантна тогда и только тогда, когда каждый смежный класс группы A по подгруппе B содержит элемент того же порядка, что и этот смежный класс.*

Пусть B — сервантная подгруппа группы A, и пусть $a^* \in A/B$. Если $o(a^*) = \infty$, то любой представитель смежного класса a^* имеет бесконечный порядок. Если $o(a^*) = n < \infty$, то для любого представителя $g \in a^*$ имеем $ng \in B$. Из сервантности получаем, что $nb = ng$ для некоторого $b \in B$. Элемент $a = g - b \in a^*$ имеет порядок $\leqslant n$, т. е. порядок n. Обратно, если выполнено сформулированное в теореме условие и $ng = b \in B$ для некоторого $g \in A$, то выберем в смежном классе $g + B$ представитель a, имеющий порядок, равный порядку этого смежного класса. Тогда $na = 0$ и для элемента $g - a \in B$ выполнено равенство $n(g - a) = b$. ∎

Следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

Теорема 28.2 (Куликов [1]). *Если B — сервантная подгруппа группы A и A/B — прямая сумма циклических групп, то B служит для A прямым слагаемым.*

В силу леммы 9.4 можно ограничиться случаем, когда A/B — циклическая группа, скажем, порожденная элементом a^*. Ввиду теоремы 28.1 можно выбрать представитель $a \in a^*$ того же порядка, что и a^*. Тогда элементы подгруппы $\langle a \rangle$ составят полную систему представителей смежных классов группы A по подгруппе B. Отсюда $A = B \oplus \langle a \rangle$. ∎

Следствие 28.3. *Если подгруппа B сервантна в A и A/B — конечно порожденная группа, то B — прямое слагаемое группы A.* ∎

Справедливо следующее утверждение, двойственное теореме 27.10.

Теорема 28.4. *Для подгруппы B группы A эквивалентны условия:*

1) *подгруппа B сервантна в A;*

2) *подгруппа B служит прямым слагаемым для $n^{-1}B$ при любом $n > 0$;*

3) *если C — группа, лежащая между B и A, и C/B — конечно порожденная группа, то B служит для C прямым слагаемым.*

Если подгруппа B сервантна в A, то по теоремам 17.2 и 28.2 условие 2) вытекает из ограниченности группы $(n^{-1}B)/B$. Чтобы доказать, что из 2) следует 3), мы можем в силу теоремы 14.4 ограничиться случаем, когда C/B — конечная группа. Тогда $C \subseteq n^{-1}B$ для некоторого n, и 3) непосредственно получается из 2). Так как из 3) следует, что каждый смежный класс группы A по подгруппе B содержит элемент того же порядка, что и этот смежный класс, то условие 1) непосредственно вытекает из теоремы 28.1. ■

Сервантные подгруппы B были определены в терминах разрешимости уравнений $nx = b \in B$, разрешимых во всей группе. Предложение 22.3 показывает, что для произвольных систем уравнений это места не имеет. Однако если мы ограничимся системами, содержащими лишь конечное число неизвестных, то получим следующий результат.

Теорема 28.5 (Прюфер [3]). *Если система уравнений*

$$\sum_{j=1}^{m} n_{ij}x_j = b_i \quad (b_i \in B, \ i \in I)$$

над сервантной подгруппой B группы A, содержащая конечное число m неизвестных, имеет решение в группе A, то она имеет решение и в B.

Пусть $x_j = a_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ — решение данной системы уравнений в группе A. В силу теоремы 28.4, п. 3), подгруппа B служит прямым слагаемым для подгруппы $\langle B, a_1, \ldots, a_m \rangle = C$, т. е. $C = B \oplus B_1$. Компоненты элементов a_j в прямом слагаемом B дают решение, лежащее в B. ■

Очевидно, что эта теорема характеризует сервантные подгруппы. Легко также показать, что все результаты этого параграфа верны для p-адических модулей.

Упражнения

1. Подгруппа B сервантна в группе A тогда и только тогда, когда $n^{-1}B = B + n^{-1}0$ для каждого $n > 0$.

2. Если B — сервантная подгруппа группы A, то

$$(A/B)[n] \cong A[n]/B[n] \text{ для любого } n.$$

3 (Куликов [3]). Если $A = B + C$ и $B \cap C$ — сервантная подгруппа группы B, то $A[n] = B[n] + C[n]$ для любого n.

4 (Куликов [3]). Если a — элемент наименьшего порядка в определяемом им смежном классе $a + pA$ и если $o(a) \neq \infty$, то $\langle a \rangle$ служит прямым слагаемым для группы A.

5. Периодическая группа обладает ненулевой циклической факторгруппой тогда и только тогда, когда она имеет ненулевое циклическое прямое слагаемое.

6. Доказать утверждения 28.1—28.5 для p-адических модулей

§ 29. Сервантно точные последовательности

Короткая точная последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \qquad (1)$$

называется *сервантно точной*, если $\operatorname{Im}\alpha$ — сервантная подгруппа группы B. Данная точная последовательность называется *p-сервантно точной*, если $\operatorname{Im}\alpha$ есть p-сервантная подгруппа группы B.

Для простоты в следующей теореме мы будем обозначать одной и той же буквой заданный гомоморфизм и все гомоморфизмы, им индуцированные.

Теорема 29.1. *Для точной последовательности* (1) *каждое из следующих условий эквивалентно тому, что последовательность* (1) *сервантно точна*:

а) *последовательность* $0 \to nA \xrightarrow{\alpha} nB \xrightarrow{\beta} nC \to 0$ *точна при любом* n;

б) *последовательность* $0 \to A[n] \xrightarrow{\alpha} B[n] \xrightarrow{\beta} C[n] \to 0$ *точна при любом* n;

в) *последовательность* $0 \to A/nA \xrightarrow{\alpha} B/nB \xrightarrow{\beta} C/nC \to 0$ *точна при любом* n;

г) *последовательность* $0 \to A/A[n] \xrightarrow{\alpha} B/B[n] \xrightarrow{\beta} C/C[n] \to 0$ *точна при любом* n.

Тот факт, что композиция α и β каждый раз дает 0, очевиден. Если последовательность (1) точна, то в п. а) отображение α — мономорфизм, β — эпиморфизм. Ядром отображения β из а) является подгруппа $\alpha A \cap nB$, которая равна $\alpha(nA)$ тогда и только тогда, когда (1) — сервантно точная последовательность.

В п. б) отображение α всегда является мономорфизмом, а β — эпиморфизм при любом n в точности тогда, когда каждый элемент группы C, имеющий порядок n, является образом элемента порядка n из B; это по теореме 28.1 эквивалентно сервантности. Так как α — мономорфизм, $\operatorname{Ker}\beta = \alpha A \cap B[n] = \alpha A[n]$.

Остальное следует из уже доказанного и из 3×3-леммы. ∎

Замечание 1. Нам понадобится тот факт, что *если последовательность* (1) *сервантно точна, то последовательность в п.* б) *расщепляется*. Ввиду теоремы 27.5 достаточно показать, что последовательность из п. б) сервантно точна. Доказательство не сложно и предоставляется читателю [см. упр. 1].

Замечание 2. Если ограничиться случаем $n = p^k$, где простое число p фиксировано, а $k = 1, 2, \ldots$, то теорема 29.1 даст условия для p-сервантности.

Следующие две теоремы дают характеризацию сервантно точных последовательностей, использующую гомологические свойства.

Теорема 29.2. *Точная последовательность* (1) *сервантно точна тогда и только тогда, когда каждая коциклическая группа G инъективна относительно последовательности* (1), *т. е. для всякой коциклической группы G диаграмма*

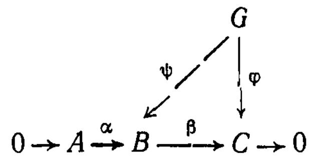
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \swarrow{\scriptstyle\psi} & & & & & \\ & & G & & & & & & \end{array}$$

может быть вложена в коммутативную диаграмму при соответствующем выборе гомоморфизма ψ: $B \to G$.

Легко показать, что конечная прямая сумма $G_1 \oplus \ldots \oplus G_m$ инъективна относительно последовательности (1) тогда и только тогда, когда каждая группа G_i инъективна относительно этой последовательности. Поэтому группу G можно считать конечно копорожденной. Далее, ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда φ — эпиморфизм. Тогда существование гомоморфизма ψ эквивалентно возможности продолжить изоморфизм $A/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong G$ до гомоморфизма $B/\alpha\,\mathrm{Ker}\,\varphi \to G$, т. е. эквивалентно тому, что $\alpha\,(A/\mathrm{Ker}\,\varphi)$ — прямое слагаемое группы $B/\alpha\,\mathrm{Ker}\,\varphi$. Теперь остается применить теорему 27.10. ∎

Если провести двойственные рассуждения и использовать теорему 28.4, то получится двойственный результат.

Теорема 29.3. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы точная последовательность* (1) *была сервантно точной, является проективность относительно последовательности* (1) *любой циклической группы G, т. е. условие, что для любой циклической группы G и любого гомоморфизма φ: $G \to C$ существует гомоморфизм ψ: $G \to B$, при котором становится коммутативной диаграмма*



Посмотрим теперь, как ведут себя сервантно точные последовательности по отношению к прямым пределам.

Теорема 29.4. *Если*

$$\boldsymbol{A} = \{A_i\,(i \in I);\ \pi_i^j\};\quad \boldsymbol{B} = \{B_i\,(i \in I);\ \rho_i^j\}\ \text{и}\ \boldsymbol{C} = \{C_i\,(i \in I);\ \sigma_i^j\}$$

— прямые спектры групп и φ: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, ψ: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ — такие гомоморфизмы между ними, что для любого $i \in I$ последовательность

$$0 \to A_i \xrightarrow{\varphi_i} B_i \xrightarrow{\psi_i} C_i \to 0$$

сервантно точна, то индуцированная последсвательность прямых пределов

$$0 \to A_* \xrightarrow{\varphi_*} B_* \xrightarrow{\psi_*} C_* \to 0$$

также сервантно точна.

По следствию 11.4 достаточно проверить сервантность подгруппы $\varphi_* A_*$ в группе B_*. Пусть для элементов $a \in A_*$, $b \in B_*$ при некотором n выполнено равенство $nb = \varphi_* a$. Тогда существуют такое $i \in I$ и такие элементы $a_i \in A_i$, $b_i \in B_i$, что $a = \pi_i a_i$, $b = \rho_i b_i$ для канонических отображений $\pi_i\colon A_i \to A_*$, $\rho_i\colon B_i \to B_*$. В силу коммутативности диаграммы (5) из § 11 $\rho_i n b_i = \varphi_* \pi_i a_i = \rho_i \varphi_i a_i$, откуда $\rho_i(nb_i - \varphi_i a_i) = 0$ и $\rho_i^j (nb_i - \varphi_i a_i) = 0$ для некоторого $j \geqslant i$. Поэтому $n\rho_i^j b_i = \rho_i^j \varphi_i a_i = \varphi_j \pi_i^j a_i$, а так как $\rho_i^j b_i \in B_j$, $\pi_i^j a_i \in A_j$ и последовательность $0 \to A_j \xrightarrow{\varphi_j} B_j \to C_j \to 0$ сервантно точна, то получается, что для некоторого элемента $g_j \in A_j$ справедливо $\varphi_j n g_j = \varphi_j \pi_i^j a_i$. Применяя ρ_j и замечая, что $\rho_j \varphi_j = \varphi_* \pi_j$, получаем $n\varphi_* g = \varphi_* a$, где $g = \pi_j g_j \in A_*$. ∎

Иными словами, предыдущая теорема утверждает, что прямой предел сервантно точных последовательностей является сервантно точной последовательностью.

Следствие 29.5 (Яхья [1]). *Всякая сервантно точная последовательность является прямым пределом расщепляющихся точных последовательностей.*

Пусть $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ — сервантно точная последовательность и $\{C_i\}_{i \in I}$ — семейство всех конечно порожденных подгрупп группы C, где $i \leqslant j$ означает, что $C_i \subseteq C_j$. Если $\sigma_i^j\colon C_i \to C_j$ — инъекции при $i \leqslant j$, то C — предел прямого спектра $\mathbf{C} = \{C_i\ (i \in I);\ \sigma_i^j\}$. Очевидно, группа B — предел прямого спектра $\mathbf{B} = \{B_i = \psi^{-1} C_i\ (i \in I);\ \rho_i^j\}$, где ρ_i^j — вложения $B_i \to B_j$. Если $\mathbf{A} = \{A_i = A;\ \pi_i^j = 1_A\}$, то φ и ψ индуцируют такие гомоморфизмы $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$, что для любого i последовательность $0 \to A_i \xrightarrow{\varphi_i} B_i \xrightarrow{\psi_i} C_i \to 0$ сервантно точна [φ_i, ψ_i — соответствующие ограничения гомоморфизмов φ и ψ]. Наша исходная последовательность — прямой предел этих сервантно точных последовательностей, а они расщепляются в силу теоремы 28.4. ∎

Последнее следствие можно использовать для доказательства теоремы довольно общего характера.

Теорема 29.6 (Яхья [1]). *Пусть F — ковариантный аддитивный функтор из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{A}$, коммутирующий с операцией взятия прямых пределов. Если*

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

— сервантно точная последовательность, то и последовательность

$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(\varphi)} F(B) \xrightarrow{F(\psi)} F(C) \to 0 \qquad (2)$$

сервантно точна.

В силу следствия 29.5 данную сервантно точную последовательность можно представить в виде прямого предела расщепляющихся точных последовательностей $0 \to A_i \xrightarrow{\varphi_i} B_i \xrightarrow{\psi_i} C_i \to 0$. В силу ковариантности и аддитивности функтора F индуцированные последовательности

$$0 \to F(A_i) \xrightarrow{F(\varphi_i)} F(B_i) \xrightarrow{F(\psi_i)} F(C_i) \to 0 \qquad (3)$$

точны и расщепляются. Кроме того, функтор F коммутирует с прямыми пределами, поэтому прямым пределом последовательностей (3) служит (2). Остается применить теорему 29.4. ■

Упражнения

1. Доказать, что если последовательность (1) сервантно точна, то последовательности а), б), в), г) из теоремы 29.1 также сервантно точны при любом n. Кроме того, за исключением последовательности а), все они расщепляются.

2. Привести непосредственное доказательство эквивалентности утверждения в) [и свойства г)] с сервантностью.

3. Пусть (1) — сервантно точная последовательность. Показать, что последовательность $0 \to A^1 \to B^1 \to C^1 \to 0$ первых ульмовских подгрупп и последовательность $0 \to A_0 \to B_0 \to C_0 \to 0$ нулевых ульмовских факторов могут не быть точными; но если одна из них точна, то вторая — тоже.

4. Пусть $\mathscr{E}$ — класс точных последовательностей и G_i $(i \in I)$ — семейство групп, где мощность множества индексов I произвольна. Каждая группа G_i инъективна относительно любой последовательности из класса $\mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда это же имеет место для прямого произведения $\prod G_i$.

5. Справедливо утверждение, двойственное упражнению 4 [где инъективность заменена проективностью и прямое произведение — прямой суммой].

6. При обозначениях теоремы 29.4 пусть φ: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ — такой гомоморфизм, что подгруппа $\varphi_i A_i$ сервантна в B_i для каждого $i \in I$. Показать, что подгруппа $\varphi_* A_*$ сервантна в B_*.

7. Пусть $0 \to \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C} \to 0$ — точная последовательность обратных спектров, причем $0 \to A_i \to B_i \to C_i \to 0$ — сервантно точная последовательность при каждом i [см. теорему 12.3]. Доказать, что последовательность $0 \to A^* \to B^* \to C^* \to 0$ может не быть сервантно точной. [*Указание*: § 21, упр. 6.]

8 (Яхья [1]). Пусть F — аддитивный функтор из категории $\mathscr{A} \times \ldots$ $\ldots \times \mathscr{A}$ (m раз) в категорию $\mathscr{A}$, ковариантный по каждому из

аргументов. Если F коммутирует с прямыми пределами и последовательности

$$0 \to A_k \xrightarrow{\alpha_k} B_k \xrightarrow{\beta_k} C_k \to 0 \quad (k=1, \ldots, m)$$

сервантно точны, то последовательность

$$0 \to \sum_k F(B_1, \ldots, A_k, \ldots, B_m) \xrightarrow{\xi} F(B_1, \ldots, B_m) \xrightarrow{\eta}$$

$$\to F(C_1, \ldots, C_m) \to 0$$

сервантно точна. Здесь

$$\xi = \nabla [\bigoplus_k F(1_{B_1}, \ldots, \alpha_k, \ldots, 1_{B_m})]$$

и $\eta = F(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

§ 30. Сервантная проективность и сервантная инъективность

В теоремах 29.2 и 29.3 сервантно точные последовательности характеризовались теми свойствами, что относительно них коциклические группы были инъективными, а циклические группы — проективными. Теперь, исходя из класса сервантно точных последовательностей, мы хотим найти все группы, которые соответственно инъективны или проективны относительно всех последовательностей этого класса.

Группа X называется *сервантно проективной*, если она проективна относительно класса сервантно точных последовательностей, т. е. если каждая диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & X & & \\ & & & \psi \swarrow & \downarrow \varphi & & \\ 0 \to A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \to 0 \end{array} \qquad (1)$$

с сервантно точной строкой может быть пополнена соответствующим гомоморфизмом ψ: $X \to B$ так, что получится коммутативная диаграмма. Для описания сервантно проективных групп нам понадобится следующая лемма.

Лемма 30.1. *Для любой группы A существуют такая прямая сумма циклических групп $X = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle$ и такой гомоморфизм η: $X \to A$, что* $\operatorname{Ker} \eta$ — *сервантная подгруппа группы X.*

Пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — множество всех элементов группы A, и пусть $A_i = \langle a_i \rangle$. Для каждого элемента a_i возьмем группу $\langle x_i \rangle$, изоморфную группе A_i, и положим $X = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle$. Вложения η_i: $\langle x_i \rangle \to A$, где

$\eta_i x_i = a_i$, порождают эпиморфизм

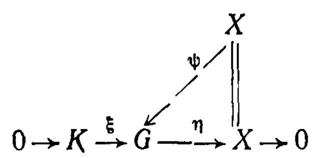
$$\eta = \nabla [\bigoplus_{i \in I} \eta_i]: X \to A,$$

ядро которого обозначим через K. Нужно проверить, что K — сервантная подгруппа группы X. Пусть $nx = b \in K$ для некоторого $x \in X$. Если $\eta x = a_i \in A$, то из $\eta x_i = a_i$ имеем $x - x_i \in K$. Так как $na_i = \eta (nx) = \eta b = 0$ и $o(x_i) = o(a_i)$, то $nx_i = 0$, откуда $n(x - x_i) = b$. ■

Теорема 30.2 (Маранда [1]). *Группа сервантно проективна тогда и только тогда, когда она — прямая сумма циклических групп.*

Пусть X — прямая сумма циклических групп, т. е. $X = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle$, и пусть в диаграмме (1) строка сервантно точна. Из теоремы 29.3 следует, что для каждого i существует такой элемент $b_i \in B$, что $\beta b_i = \varphi x_i$ и $o(b_i) = o(\varphi x_i)$. Определим гомоморфизм $\psi: X \to B$ так, чтобы он продолжал соответствие $x_i \mapsto b_i$; учитывая условия на порядки элементов и строение группы X, получаем, что это возможно. Очевидно, что гомоморфизм ψ превращает диаграмму (1) в коммутативную.

Обратно, пусть группа X сервантно проективна. По лемме 30.1 существует диаграмма



с сервантно точной строкой, где G — прямая сумма циклических групп. По предположению можно найти такой гомоморфизм $\psi: X \to G$, что $\eta\psi = 1_X$. Следовательно, ψ — инъекция на прямое слагаемое группы G. Применение теоремы 18.1 дает, что X — также прямая сумма циклических групп. ■

Переходя к двойственному случаю, назовем группу Y *сервантно инъективной*, если всякая диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \swarrow{\scriptstyle\psi} & & & & & \\ & & Y & & & & & & \end{array} \qquad (2)$$

с сервантно точной строкой может быть вложена в коммутативную диаграмму при соответствующем выборе гомоморфизма $\psi: B \to Y$. Докажем предварительно лемму, двойственную лемме 30.1.

Лемма 30.3 (Лось [1]). *Всякую группу можно вложить в качестве сервантной подгруппы в прямое произведение коциклических групп.*

Пусть B_i $(i \in I)$ — семейство всех коциклических факторгрупп данной группы A, и пусть $B = \prod_{i \in I} B_i$. Эпиморфизмы η_i: $A \to B_i$ индуцируют гомоморфизм

$$\eta = [\prod \eta_i] \Delta: A \to B.$$

Так как для каждого элемента $a \in A$, $a \neq 0$, существует такой гомоморфизм η_i, что a не лежит в его ядре [см. предложение 25.2], то η является мономорфизмом. Чтобы доказать сервантность подгруппы $\operatorname{Im} \eta$ в B, предположим, что $a \in A$, $a \notin p^n A$, и выберем в A подгруппу M, максимальную относительно свойств $p^n A \subseteq M$ и $a \notin M$. Тогда по предложению 25.2 A/M будет коциклической группой, и из включения $p^n A \subseteq M$ мы получим, что $A/M = Z(p^k)$, где $k \leqslant n$. Так как $A/M = B_i$ для некоторого i и элемент $a + M$ имеет в группе A/M высоту $\leqslant k - 1$, то включение $\eta a \in p^n B$ невозможно. ■

Следующая теорема, двойственная теореме 30.2, описывает сервантно инъективные группы.

Теорема 30.4. *Группа сервантно инъективна тогда и только тогда, когда она — прямое слагаемое прямого произведения коциклических групп.*

Пусть Y — прямое слагаемое прямого произведения $G = \prod G_i$, где все G_i — коциклические группы. Пусть π_i, ρ_i — координатные проекции и инъекции, связанные с этим прямым произведением, и пусть π: $G \to Y$, ρ: $Y \to G$ таковы, что $\pi\rho = 1_Y$. Если в диаграмме (2) строка сервантно точна, то по теореме 29.2 для каждого i существует такое отображение ψ_i: $B \to G_i$, что $\pi_i \rho \varphi = \psi_i \alpha$. Отображения ψ_i порождают отображение $\psi = [\prod \psi_i] \Delta$: $B \to G$, где $\pi_i \psi = \psi_i$. Отсюда $\pi_i \rho \varphi = \pi_i \psi \alpha$ для каждого i, т. е. $\rho\varphi = \psi\alpha$. Следовательно, $\varphi = \pi\rho\varphi = \pi\psi\alpha$ и $\pi\psi$: $B \to Y$ — искомый гомоморфизм.

Предположим теперь, что группа Y сервантно инъективна. По лемме 30.3 существует сервантно точная последовательность $0 \to Y \to G \to H \to 0$, где G — прямое произведение коциклических групп. В силу сервантной инъективности, тождественное отображение $Y \to Y$ можно продолжить до отображения $G \to Y$, откуда следует, что группа Y изоморфна прямому слагаемому группы G. ■

Сервантно инъективные группы играют важную роль с различных точек зрения. Их теория излагается в гл. VII.

В свете теорем 30.2 и 30.4 утверждения лемм 30.1 и 30.3 получают другую интерпретацию. Именно, в лемме 30.1 устанавливается, что всякую группу A можно вложить в сервантно точную последовательность

$$0 \to G \to X \to A \to 0, \tag{3}$$

где X — сервантно проективная группа [это является полным аналогом того хорошо известного факта, что любую группу можно вложить в точную последовательность (3), где X — проективная группа]. Коротко можно сказать, что

«имеется достаточно сервантно проективных объектов». Аналогично, если дана группа A, то лемма 30.3 обеспечивает существование сервантно точной последовательности

$$0 \to A \to Y \to H \to 0, \qquad (4)$$

где группа Y сервантно инъективна [это аналог теоремы 24.1]. Коротко, *«имеется достаточно сервантно инъективных объектов»*.

Упражнения

1. Показать, что в доказательстве леммы 30.1 достаточно взять подгруппы $A_i = \langle a_i \rangle$ только для множества $\{a_i\}_{i \in I}$ образующих группы A, а в доказательстве леммы 30.3 можно ограничиться теми группами B_i, для которых в $\operatorname{Ker} \eta_i$ не лежит некоторый элемент множества кообразующих группы A.

2. Привести пример группы, служащей прямым слагаемым для прямого произведения коциклических групп, но не являющейся прямым произведением коциклических групп. [*Указание*: группа целых p-адических чисел.]

3. Охарактеризовать p-сервантно проективные группы. Имеется ли достаточно p-сервантно проективных объектов?

4. Охарактеризовать p-сервантно инъективные группы. Существует ли достаточно p-сервантно инъективных объектов?

5. Гомоморфизм $\alpha: A \to B$ называется *сервантным*, если $\operatorname{Ker} \alpha$ — сервантная подгруппа группы A и $\operatorname{Im} \alpha$ — сервантная подгруппа группы B. Показать, что класс всех абелевых групп с сервантными гомоморфизмами в качестве морфизмов является категорией с достаточным числом проективных и инъективных объектов.

6. Доказать утверждение, аналогичное упражнению 11 из § 14, для сервантно проективных групп $F^{(n)}$ и сервантных гомоморфизмов α_n.

7. Доказать утверждение упражнения 9 из § 24 для сервантно инъективных групп D_n и сервантных гомоморфизмов α_n.

§ 31*. Обобщения сервантности

При изучении сервантных подгрупп мы встретились с многими свойствами сервантности, значение которых станет яснее в следующих главах. Ввиду все возрастающего значения сервантных подгрупп в последнее время уделялось много внимания различным обобщениям этого понятия.

Эти обобщения шли в двух основных направлениях. Первое из них основано на том простом замечании, что при некоторых «ограничениях конечности» сервантные подгруппы ведут себя как прямые слагаемые. Следовательно, если эти условия конечности заменить другими подходящими условиями, то возникнут понятия, аналогичные сервантности. Второе направление возникло, когда было замечено, что в группе расширений сервантные расширения образуют важную функторную подгруппу, именно первую ульмовскую подгруппу [см. теорему 53.3], и оказалось, что другой выбор функторных подгрупп ведет к новому

типу сервантности. В этой главе мы рассмотрим (в довольно общем виде) обобщения понятия сервантности только первого типа, основанные на идеях К. Уокер [1].

Как в § 6, начнем с непустого класса $\mathfrak{X}$ групп X. С каждой группой $A \in \mathcal{A}$ свяжем следующим образом два семейства подгрупп группы A:

$$_A\mathfrak{X} = \{\operatorname{Ker} \varphi \mid \varphi\colon A \to X \in \mathfrak{X}\}$$

и

$$\mathfrak{X}_A = \{\operatorname{Im} \psi \mid \psi\colon X \to A,\ X \in \mathfrak{X}\}.$$

Очевидно, $A \in {}_A\mathfrak{X}$, $0 \in \mathfrak{X}_A$, поэтому семейства ${}_A\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_A$ не пусты. Ясно также, что семейства $\mathfrak{X}_A$ являются функторными в том смысле, что для любого гомоморфизма $\alpha\colon A \to B$ образ $\alpha\mathfrak{X}_A$ лежит в $\mathfrak{X}_B$, а множества ${}_A\mathfrak{X}$ обладают свойством типа непрерывности: для любой подгруппы $B' \in {}_B\mathfrak{X}$ существует такая подгруппа $A' \in {}_A\mathfrak{X}$, что $\alpha A' \subseteq$ $\subseteq B'$.

Соответствие $\mathfrak{X}_*\colon A \mapsto \mathfrak{X}_A$ $(A \in \mathcal{A})$ следующим образом определяет $\mathfrak{X}_*$-сервантность. Подгруппа G группы A называется *$\mathfrak{X}_*$-сервантной* в A, если G служит прямым слагаемым для любой подгруппы B группы A, содержащей G и такой, что $B/G \in \mathfrak{X}_{A/G}$. Если $\mathfrak{X}$ — класс всех конечно порожденных [или класс всех циклических] групп, то $\mathfrak{X}_*$-сервантность совпадает с обычной сервантностью.

Ясно, что для любого класса $\mathfrak{X}$ прямые слагаемые являются $\mathfrak{X}_*$-сервантными подгруппами и что если подгруппа G является $\mathfrak{X}_*$-сервантной в A, то она $\mathfrak{X}_*$-сервантна и во всякой группе, лежащей между G и A. В этой общей ситуации справедлив также аналог леммы 26.1.

Лемма 31.1 (Уокер К. [1]). *Пусть B, C — такие подгруппы группы A, что $C \subseteq B \subseteq A$. Тогда*

1) *если подгруппа C является $\mathfrak{X}_*$-сервантной в B, а подгруппа B является $\mathfrak{X}_*$-сервантной в A, то C есть $\mathfrak{X}_*$-сервантная подгруппа группы A;*

2) *если подгруппа B является $\mathfrak{X}_*$-сервантной в A, то B/C есть $\mathfrak{X}_*$-сервантная подгруппа группы A/C;*

3) *если подгруппа C является $\mathfrak{X}_*$-сервантной в A, а подгруппа B/C является $\mathfrak{X}_*$-сервантной в A/C, то B есть $\mathfrak{X}_*$-сервантная подгруппа группы A.*

Предположим, что подгруппа C является $\mathfrak{X}_*$-сервантной в B, а подгруппа B является $\mathfrak{X}_*$-сервантной в A, и пусть $C \subseteq G \subseteq A$, где $G/C \in \mathfrak{X}_{A/C}$, т. е. существует эпиморфизм $\psi\colon X \to G/C$ для некоторого $X \in \mathfrak{X}$. Если выполнить последовательно ψ и естественный эпиморфизм $G/C \to (G+B)/B$, то получится, что $(G+B)/B \in \mathfrak{X}_{A/B}$, откуда $G + B = B \oplus H$ для некоторой подгруппы $H \subseteq A$. Пусть B' — образ подгруппы G при проектировании на B. Тогда имеем эпиморфизм $G/C \to B'/C$, показывающий, что $B'/C \in \mathfrak{X}_{B/C}$. Отсюда $B' = C \oplus K$ для некоторой подгруппы K. Получаем, что $G \subseteq B' \oplus H = C \oplus K \oplus H$

и, таким образом, $G = C \oplus [G \cap (K \oplus H)]$, т. е. C есть $\mathfrak{X}_*$-сервантная подгруппа группы A.

Чтобы доказать 2), предположим, что подгруппа B является $\mathfrak{X}_*$-сервантной в A, и пусть $B/C \subseteq G/C \subseteq A/C$, где $(G/C)/(B/C) \cong G/B$ — эпиморфный образ группы $X \in \mathfrak{X}$. Тогда B — прямое слагаемое группы G и B/C — прямое слагаемое группы G/C. Этим утверждение 2) доказано.

Наконец, предположим, что выполнены условия п. 3), и пусть $B \subseteq G \subseteq A$, где $G/B \in \mathfrak{X}_{A/B}$. Так как $G/B \cong (G/C)/(B/C)$, то B/C служит для G/C прямым слагаемым, т. е. $G/C = B/C \oplus H/C$. Второе слагаемое здесь изоморфно G/B, поэтому в силу $\mathfrak{X}_*$-сервантности C в A имеем $H = C \oplus K$ для некоторой подгруппы $K \subseteq H$. Следовательно, $B + K = B + C + K = B + H = G$ и $B \cap K = B \cap H \cap K = C \cap K = 0$, откуда $G = B \oplus K$. Итак, утверждение 3) доказано. ∎

Легко видеть, что не все результаты, полученные для сервантности, переносятся на случай $\mathfrak{X}_*$-сервантности. Например, в общем случае $\mathfrak{X}_*$-сервантность — не индуктивное свойство.

Точная последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \qquad (1)$$

называется *$\mathfrak{X}_*$-сервантно точной*, если αA есть $\mathfrak{X}_*$-сервантная подгруппа группы B. Группы, проективные [инъективные] относительно всех $\mathfrak{X}_*$-сервантно точных последовательностей, называются *$\mathfrak{X}_*$-сервантно проективными* [*$\mathfrak{X}_*$-сервантно инъективными*].

Теорема 31.2 (Уокер К. [1]). *Для любой группы A и любого множества групп $\mathfrak{X}$ существует эпиморфизм φ: $G \to A$, где G есть $\mathfrak{X}_*$-сервантно проективная группа, а* $\operatorname{Ker}\varphi$ *является $\mathfrak{X}_*$-сервантной подгруппой группы G.*

Группа $\mathfrak{X}_*$-сервантно проективна тогда и только тогда, когда она — прямое слагаемое прямой суммы бесконечных циклических групп и факторгрупп групп из множества $\mathfrak{X}$.

Если Y — факторгруппа группы $X \in \mathfrak{X}$, последовательность (1) $\mathfrak{X}_*$-сервантно точна и η: $Y \to C$, то гомоморфизм η можно провести через $B \to C$, так как αA — прямое слагаемое группы $\beta^{-1}\eta Y$. Следовательно, группа Y является $\mathfrak{X}_*$-сервантно проективной; $\mathfrak{X}_*$-сервантно проективно также всякое прямое слагаемое прямой суммы $\mathfrak{X}_*$-сервантно проективных групп. Этим доказана достаточность во второй части теоремы.

Чтобы доказать первое утверждение теоремы, для любой группы $A_i \in \mathfrak{X}_A$ выберем такой мономорфизм φ_i: $Y_i \to A$, что Y_i — факторгруппа некоторой группы $X_i \in \mathfrak{X}$ и $\operatorname{Im}\varphi_i = A_i$. Эти мономорфизмы φ_i вместе с эпиморфизмом φ_0: $F \to A$, где F — проективная группа, порождают эпиморфизм

$$\varphi = \nabla(\bigoplus_i \varphi_i \oplus \varphi_0): G = \bigoplus_i Y_i \oplus F \to A.$$

В силу доказанного в предыдущем абзаце группа G является $\mathfrak{X}_*$-сервантно проективной. Пусть $K = \operatorname{Ker}\varphi$, и пусть $K \subseteq H \subseteq G$, где $H/K \in \mathfrak{X}_{G/K}$. В силу того что $G/K \cong A$, для некоторого j существует эпиморфизм σ: $H \to Y_j$ с ядром $\operatorname{Ker}\sigma = K$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\lambda} & G \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\varphi \\ Y_j & \xrightarrow{\varphi_j} & A \end{array}.$$

здесь λ: $H \to G$ [и позже μ: $K \to H$] — естественное вложение. Если ρ_j: $Y_j \to G$ — инъекция, то для $\lambda - \rho_j\sigma$: $H \to G$ выполнено

$$\varphi(\lambda - \rho_j\sigma) = \varphi\lambda - \varphi\rho_j\sigma = \varphi\lambda - \varphi_j\sigma = 0.$$

Следовательно, существует такой гомоморфизм τ: $H \to K = \operatorname{Ker}\varphi$, что $\lambda\mu\tau = \lambda - \rho_j\sigma$ и, таким образом, $\lambda\mu\tau\mu = \lambda\mu - \rho_j\sigma\mu = \lambda\mu - \rho_j 0 = \lambda\mu$. Здесь $\lambda\mu$ — мономорфизм, поэтому $\tau\mu = 1_K$, и K — прямое слагаемое группы H, т. е. K есть $\mathfrak{X}_*$-сервантная подгруппа группы G.

Обращаясь к доказательству необходимости во втором утверждении, предположим, что H есть $\mathfrak{X}_*$-сервантно проективная группа. По доказанному существует $\mathfrak{X}_*$-сервантно точная последовательность $0 \to K \to G \to H \to 0$, где G — прямая сумма свободной группы и факторгрупп групп из множества $\mathfrak{X}$. В силу предположения, сделанного относительно группы H, тождественное отображение 1_H можно провести через $G \to H$, откуда $G \cong K \oplus H$. ∎

Теперь легко сформулировать двойственное понятие ${}_*\mathfrak{X}$-сервантности, даваемое соответствием ${}_*\mathfrak{X}$: $A \mapsto {}_A\mathfrak{X}$. Подгруппа G называется *${}_*\mathfrak{X}$-сервантной* в A, если G/B является прямым слагаемым группы A/B для любой такой подгруппы B группы G, что $G/B \in {}_{A/B}\mathfrak{X}$. Заметим, что обычная сервантность соответствует выбору в качестве $\mathfrak{X}$ класса всех коциклических групп. Можно проверить, что для ${}_*\mathfrak{X}$-сервантности справедливы утверждения леммы 31.1 и утверждения, двойственные теореме 31.2. Доказательство этого предоставляется читателю.

Существенно отметить два важных частных случая.

Пусть $\mathfrak{X}(\mathfrak{m})$ — класс всех групп, мощность которых меньше фиксированного бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$. Тогда $\mathfrak{X}(\mathfrak{m})_*$-сервантность подгруппы G в группе A означает, что G служит прямым слагаемым для любой группы B, где $G \subseteq B \subseteq A$ и $|B/G| < \mathfrak{m}$. В этом случае подгруппа G называется просто *$\mathfrak{m}$-сервантной* в A (Гачайи [2]). Ясно, что если $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, то из $\mathfrak{m}$-сервантности следует $\mathfrak{n}$-сервантность, а $\aleph_0$-сервантность эквивалентна обычной сервантности.

Легко указать $\aleph_0$-сервантную подгруппу, не являющуюся $\aleph_1$-сервантной. Например, если F — свободная группа и $F/H \cong Q$,

то H является $\aleph_0$-сервантной, но не $\aleph_1$-сервантной подгруппой. Примером $\aleph_1$-сервантной подгруппы, не выделяющейся прямым слагаемым, служит подгруппа H свободной группы F, для которой F/H — прямое произведение счетного числа бесконечных циклических групп. Это вытекает из теоремы 19.2, где было показано, что F/H есть $\aleph_1$-свободная, но не свободная группа.

Вторым важным частным случаем является тот, когда $\mathfrak{X}$ — класс всех циклических групп простых порядков. В этом случае подгруппа G есть $_*\mathfrak{X}$-сервантная подгруппа группы A, если из $B \subset G$ и $G/B \cong Z(p)$ следует, что G/B служит прямым слагаемым для группы A/B. Нетрудно заметить, что это эквивалентно тому, что G/pG служит прямым слагаемым для A/pG при любом p, а это, в свою очередь, эквивалентно тому, что

$$pG = G \cap pA \quad \text{при любом простом } p.$$

Если это имеет место, то подгруппа G называется *чистой подгруппой* группы A [другой термин: *слабо сервантная подгруппа*]. Это понятие изучал Хонда [1].

Упражнения

1. Для $_*\mathfrak{X}$-сервантности доказать утверждения леммы 31.1 и утверждения, двойственные теореме 31.2.

2. Установить связь между $\mathfrak{X}_*$- и $\mathfrak{Y}_*$-сервантностью и между $_*\mathfrak{X}$- и $_*\mathfrak{Y}$-сервантностью в случае, когда класс $\mathfrak{X}$ содержится в классе $\mathfrak{Y}$.

3. Показать, что $\mathfrak{X}_*$-сервантность [$_*\mathfrak{X}$-сервантность] не изменится, если заменить класс $\mathfrak{X}$ классом всех факторгрупп [всех подгрупп] групп из класса $\mathfrak{X}$.

4 (Уокер К. [1]). Если кардинальное число $\mathfrak{m}$ имеет вид $\mathfrak{m} = \aleph_{\sigma+1}$ [т. е. не является предельным кардинальным числом], то группа $\mathfrak{m}$-сервантно проективна в точности тогда, когда она — прямая сумма групп мощности $<\mathfrak{m}$. [*Указание*: см. теорему 31.2 и предложение 9.10.]

5. Подгруппа G является $\mathfrak{m}$-сервантной подгруппой группы A тогда и только тогда, когда всякая система уравнений над G с множеством неизвестных мощности $<\mathfrak{m}$ разрешима в G, если она имеет решение в группе A. [*Указание*: см. теорему 28.5.]

6. Если для порядкового числа σ определить $p^\sigma A$, как в § 37, то для любой $\mathfrak{m}$-сервантной подгруппы G группы A и любого порядкового числа σ мощности $<\mathfrak{m}$ будет иметь место равенство

$$p^\sigma G = G \cap p^\sigma A.$$

[*Указание*: индукцией по σ доказать, что $a \in p^\sigma A$ эквивалентно разрешимости определенной системы уравнений, содержащей не более $|\sigma|$ неизвестных.]

7. Подгруппу B группы A можно вложить в $\aleph_\sigma$-сервантную подгруппу мощности $\leqslant |B|^{\aleph_\rho}$, где $\rho = \sigma - 1$ или $\rho = \sigma$ в зависимости

от того, является σ непридельным или предельным порядковым числом. [*Указание*: провести рассуждение, как в предложении 26.2, и использовать упр. 5.]

8. Неразложимая группа без кручения мощности больше $\aleph_{\sigma+1}$ содержит $\aleph_\sigma$-сервантную подгруппу, которая не выделяется прямым слагаемым. [*Указание*: см. упр. 7; предположить, что выполнена обобщенная гипотеза континуума.]

9. Доказать предложение 9.2 в) для $\mathfrak{m}$-сервантной подгруппы B группы A при предположении, что $| V : U | < \mathfrak{m}$, и показать, что это характеризует $\mathfrak{m}$-сервантность.

10 (Хонда [1]). (а) Привести пример чистой, но не сервантной подгруппы.

(б) В группах без кручения чистота и сервантность эквивалентны.

(в) Чистота является индуктивным свойством.

11. Если подгруппа B чиста в группе A и либо B, либо A/B — элементарная p-группа, то B — прямое слагаемое группы A.

12 (Хонда [1]). (а) Если $B \subseteq A$ и C ($\subseteq A$) есть B-высокая подгруппа группы A, то C — чистая подгруппа в A.

(б) Подгруппа B группы A служит для A абсолютным прямым слагаемым тогда и только тогда, когда для всякой чистой подгруппы C группы A, не пересекающейся с B, подгруппа $B + C$ снова чиста в A.

13. Группа не содержит нетривиальных чистых подгрупп тогда и только тогда, когда ее ранг $\leqslant 1$.

14 (Длаб [1]). Пусть группа A имеет конечный ранг. Подгруппа B группы A является чистой тогда и только тогда, когда $r(B) + r(A/B) = r(A)$.

15. Описать чисто проективные и чисто инъективные группы.

16. (а) Пусть E — делимая оболочка группы A. Подгруппа B чиста в A тогда и только тогда, когда $B = A \cap D$ для некоторой делимой подгруппы D группы E.

(б) Утверждение (а) не верно, если E не является минимальной делимой группой, содержащей группу A.

17. Всякую подгруппу B группы A можно вложить в чистую подгруппу группы A, являющуюся минимальной чистой подгруппой, содержащей B. [*Указание*: см. упр. 16.]

18. Группа бесконечного ранга τ содержит 2^τ чистых подгрупп. [*Указание*: использовать максимальную независимую систему элементов и упр. 17.]

19 (Рангасвами [2]). Подгруппа G группы A является пересечением чистых подгрупп группы A тогда и только тогда, когда $A[p]$ не содержится в G, если $(A/G)[p] \neq 0$.

20 (а) (Куликов [3]). В p-группе A подгруппа C называется *изотипной*, если

$$p^\sigma C = C \cap p^\sigma A \text{ для любого порядкового числа } \sigma.$$

Попытаться доказать лемму 31.1 для изотипных подгрупп.

(б) (Ирвин и Уокер [2]). Показать, что подгруппа C изотипна в группе A тогда и только тогда, когда

$$(p^{\sigma}C)[p] = C \cap (p^{\sigma}A)[p] \quad \text{для любого } \sigma.$$

Замечания

Замечание, что сервантность можно обобщать в двух существенно различных направлениях [учитывающих свойства, перечисленные в § 27 и 28 соответственно], послужнло отправным пунктом работы К. Уокер [1]. Получающиеся обобщения сервантностн она назвала соответственно $\mathfrak{X}$-косервантностью и и $\mathfrak{X}$-сервантностью. Другие авторы для определення сервантности подмодуля N в модуле M используют другие свойства, например $\alpha N = N \cap \alpha M$ для любого $\alpha \in \mathsf{R}$ или $\mathsf{L}N = N \cap \mathsf{L}M$ для всякого левого [правого илн двустороннего] идеала L кольца R.

Естественным способом введення понятия сервантиости для модулей является использование следствня 29.5. Прежде всего заметим, что для точной последовательностн R-модулей $0 \to N \to M \to P \to 0$ эквивалентны следующие условия:

а) данная точная последовательность есть прямой предел расщепляющихся точных последовательностей;

б) всякий конечно связанный R-модуль проективен относительно данной точной последовательности;

в) всякая конечная система уравнений над N, разрешимая в M, нмеет решение в N;

г) для всякого правого R-модуля J индуцнрованная последовательность

$$0 \to J \otimes_{\mathsf{R}} N \to J \otimes_{\mathsf{R}} M \to J \otimes_{\mathsf{R}} P \to 0$$

точна [см. теорему 60.4];

д) индуцнрованная последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Z}}(P, Q/Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Z}}(M, Q/Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Z}}(N, Q/Z) \to 0$$

точна н расщепляется.

В терминах п. г) сервантность определялась Коном [Cohn P., *Math. Z.*, **71** (2959), 380—398]; пока это наиболее используемое определение. Прн этом определенин все точные последовательности R-модулей сервантно точны тогда н только тогда, когда кольцо R регулярно в смысле фон Неймана.

Заметим, что сервантные подмодулн инъективных модулей не обязаны быть инъективнымн; они инъективны тогда и только тогда, когда кольцо нётерово слева.

Сервантность можно также рассматрнвать с точкн зрения гомологической алгебры. В этой связн наиболее ннтересны работа Нунке [3] и общая теория сервантности Штенштрёма [Stenström B., *J. Algebra*, 8 (1968), 352—361].

Сервантная проективность н сервантная ннъективность приобретают смысл, как только введено понятие сервантности. Для соответствующих вариантов этого понятия доказываются лемма 30.1 и теорема 30.2; см., например, Фильдхаус [Fieldhouse D., Queen's Preprint Series, № 14 (1967)]. Комментарии, касающиеся сервантной инъективностн, будут даны в замечаниях к гл. VII. Теорема 27.5 может быть распространена на «ограниченные» квазиинъективные модули, см. Фукс [Fuchs L., *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*].

Проблема 13. Найти условия на подгруппу группы A, при которых она является пересечением конечного числа сервантных [p-сервантных] подгрупп группы A.

О бесконечных пересечениях в p-группах см. Меджиббен [1].

Проблема 14. Исследовать сервантно высокие подгруппы [т. е. максимальные не пересекающиеся с данной подгруппой среди сервантных подгрупп].

Проблема 15. а) Если F — подфунктор тождественного функтора, то назовем *F-сервантно точной* такую точную последовательность $0 \to A \to B \to C \to 0$, что индуцированная последовательность $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ точна. Построить теорию F-сервантности.

б) Сделать двойственную вещь для $F^*(A) = A/F(A)$.

Проблема 16. Найти условия, которые нужно наложить на классы групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, чтобы были эквивалентными а) $\mathfrak{X}_*$- и $\mathfrak{Y}_*$-сервантность; б) ${}_*\mathfrak{X}$- и ${}_*\mathfrak{Y}$-сервантность; в) $\mathfrak{X}_*$- и ${}_*\mathfrak{Y}$-сервантность.

Проблема 17. а) Изучить свойства *квазисервантно инъективных* групп [т. е. таких групп A, что всякий гомоморфизм $G \to A$, где G — сервантная подгруппа группы A, индуцируется эндоморфизмом группы A].

б) Двойственная проблема для *квазисервантно проективных* групп.

Проблема 18. Для каких порядковых чисел σ существуют $\aleph_\sigma$-сервантные подгруппы, не являющиеся $\aleph_{\sigma+1}$-сервантными?

Ответ положителен, если σ — непрндельное порядковое чнсло, не превосходящее первое недостижимое порядковое число.

Проблема 19. Найти условия на изотипную подгруппу p-группы, при которых она выделяется прямым слагаемым.

Проблема 20. Найти мощность множества а) всех [неизоморфных] изотипных подгрупп p-группы; б) всех $\aleph_\sigma$-сервантных подгрупп.

Глава VI
БАЗИСНЫЕ ПОДГРУППЫ

Как мы знаем, редуцированные группы не всегда разлагаются в прямую сумму циклических групп. Но всякая группа содержит прямые суммы циклических групп, и если мы возьмем наиболее широкие подгруппы, являющиеся прямыми суммами циклических групп бесконечного порядка и порядков, равных степеням простых чисел, то, как показывает рассмотрение рангов, получим некоторую слабую единственность. Для p-групп Л. Я. Куликов [2] отметил важность наиболее широких сервантных подгрупп, являющихся прямыми суммами циклических групп. Такие подгруппы оказались инвариантами p-групп, и теория p-групп в значительной мере основывается на знании того, как эти так называемые базисные подгруппы располагаются в самих группах.

Оказалось, что некоторые результаты теории базисных подгрупп могут быть распространены на произвольные группы: для любого простого числа p можно определить p-базисные подгруппы, где в определении число p играет особую роль. Мы увидим, что эти p-базисные подгруппы полезны в различных случаях, особенно в следующих главах.

§ 32. p-базисные подгруппы

Пусть A — произвольная группа и p — фиксированное простое число. Система $\{a_i\}_{i\in I}$ элементов группы A, не содержащая 0, называется *p-независимой*, если для любой конечной подсистемы $a_1, \ldots, a_k$ и любого натурального числа r из

$$n_1a_1 + \ldots + n_ka_k \in p^rA \qquad (n_ia_i \neq 0,\ n_i \in \mathbb{Z}) \tag{1}$$

следует

$$p^r \mid n_i \qquad (i = 1, \ldots, k). \tag{2}$$

Таким образом, по определению p-независимость носит конечный характер. Следовательно, всякая p-независимая система элементов группы A может быть расширена до максимальной.

Заметим, что *любая p-независимая система обязательно независима.* В самом деле, если элементы $a_1, \ldots, a_k$ являются p-независимыми и $n_1a_1 + \ldots + n_ka_k = 0$, причем $n_ia_i \neq 0$, то для любого r имеет место (1) и, следовательно, (2), откуда $n_i = 0$. Полученное противоречие доказывает независимость системы.

Заметим также, что *p-независимая система содержит только элементы бесконечного порядка и порядков, равных степеням данного простого числа p.* Действительно, если элемент a имеет конечный порядок m и входит в p-независимую систему, а p^s — максимальная

степень числа p, делящая m, то $p^s a$ принадлежит любой подгруппе $p^r A$, откуда или $p^r \mid p^s$ для всякого r, или $p^s a = 0$.

Проверим теперь справедливость следующей леммы технического характера.

Лемма 32.1 (Фукс [9]). *Подгруппа, порожденная p-независимой системой элементов группы A, p-сервантна в A.*

Если независимая система элементов, содержащая только элементы бесконечного порядка и порядков, равных степеням простого числа p, порождает p-сервантную подгруппу, то эта система элементов p-независима.

Пусть C — подгруппа, порожденная p-независимой системой $\{a_i\}_{i \in I}$. Предположим, что $c \in C \cap p^r A$, т. е. $c = n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k \in p^r A$, где $n_i a_i \neq 0$. В силу p-независимости существуют такие целые числа m_i, что $n_i = p^r m_i$, откуда $c = p^r (m_1 a_1 + \ldots + m_k a_k) \in p^r C$. Следовательно, C есть p-сервантная подгруппа группы A.

Чтобы проверить справедливость второго утверждения, предположим, что $\{a_i\}_{i \in I}$ — независимая система элементов группы A, в которой порядок каждого элемента равен ∞ или степени заданного простого числа p. Положим

$$C = \langle \ldots, a_i, \ldots \rangle = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle.$$

По предположению C есть p-сервантная подгруппа. Если $n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k \in p^r A$ и $n_i a_i \neq 0$, то из p-сервантности подгруппы C следует, что $n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k = p^r (m_1 a_1 + \ldots + m_k a_k)$ для некоторых целых чисел m_i. В силу независимости $n_i a_i = p^r m_i a_i$, $i = 1, \ldots, k$. Из предположения относительно порядков элементов a_i имеем $p^r \mid n_i$. ■

Мы подошли к определению p-базисных подгрупп. Подгруппа B группы A называется *p-базисной*, если выполнены следующие три условия:

1) подгруппа B является прямой суммой циклических p-групп и бесконечных циклических групп;

2) B есть p-сервантная подгруппа группы A;

3) факторгруппа A/B является p-делимой группой.

[Мы подчеркиваем, что p везде обозначает одно и то же фиксированное простое число.] Согласно этому определению, подгруппа B обладает базисом, который называется *p-базисом* группы A.

Если на группе A определена p-адическая топология, то из условий 1)—3) следует, что группа B хаусдорфова в своей p-адической топологии, которая совпадает с топологией, индуцированной p-адической топологией группы A, и что подгруппа B плотна в A [см. Калужнин [1]]. Очевидно, группа A служит сама для себя p-базисной подгруппой тогда и только тогда, когда для группы A выполнено условие 1), а 0 является p-базисной подгруппой тогда и только тогда, когда A есть p-делимая группа.

Лемма 32.2. *Система элементов $\{a_i\}_{i \in I}$ служит p-базисом для группы A в точности тогда, когда она является максимальной p-независимой системой в A.*

В силу определения p-базиса и сделанного выше курсивом замечания нам нужно рассмотреть только элементы бесконечного порядка и порядков, равных степеням числа p.

Предположим сначала, что $\{a_i\}_{i \in I}$ есть p-базис. Из леммы 32.1 и условий 1), 2) получаем, что система $\{a_i\}_{i \in I}$ является p-независимой. Из 3) следует, что для любого ненулевого элемента $g \in A$ имеет место соотношение вида $g + n_1a_1 + \ldots + n_ka_k \in pA$. Поэтому если расширить систему $\{a_i\}_{i \in I}$ путем добавления к ней элемента g, то получится уже не p-независимая система.

Обратно, пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — максимальная p-независимая система элементов группы A. Тогда она независима, и условие 1), очевидно, выполняется. Из леммы 32.1 вытекает условие 2). Чтобы доказать 3), предположим, что элемент $g \neq 0$ лежит в A и что $o(g) = p^t$. В силу максимальности системы $\{a_i\}_{i \in I}$ имеет место некоторое соотношение вида $n_0g + n_1a_1 + \ldots + n_ka_k \in p^rA$, где $n_0g \neq 0$, $n_ia_i \neq 0$ при $i = 1, \ldots, k$ и $p^r \nmid n_j$ для некоторого j $(0 \leqslant j \leqslant k)$. В силу p-независимости элементов a_i, очевидно, $p^r \nmid n_0$. Пусть $n_0 = p^sm_0$, $0 \leqslant s < r$, $(m_0, p) = 1$. Тогда $n_1a_1 + \ldots + n_ka_k \in p^sA$, откуда $n_i = p^sm_i$ для соответствующих целых чисел m_i $(i = 1, \ldots, k)$. Таким образом,

$$p^s(m_0g + m_1a_1 + \ldots + m_ka_k) = p^rb$$

для некоторого $b \in A$ и $p^s(m_0g - p^{r-s}b + m_1a_1 + \ldots + m_ka_k) = 0$. Предположим, что мы уже доказали делимость элементов из A на число p по модулю $B = \langle \ldots, a_i, \ldots \rangle$ в случае, когда их порядок есть степень числа p, меньшая p^t. Тогда получается, что $m_0g - p^{r-s}b + m_1a_1 + \ldots + m_ka_k + B$, т. е. и $m_0g + B$, делится на p [так как, поскольку $n_0g \neq 0$, $s < t$]. Так как $(m_0, p) = 1$, то элемент $g + B$ также делится на p, т. е. по индукции получаем, что каждый элемент группы A, имеющий конечный порядок, делится на p по модулю B. Если элемент g имеет бесконечный порядок, то, рассуждая таким же образом, мы покажем, что $m_0g + B$, т. е. и $g + B$, делится на p. ∎

Теорема 32.3 (Фукс [9]). *Всякая группа для любого простого числа p содержит p-базисные подгруппы.*

В группе существует максимальная p-независимая система. По предыдущей лемме она порождает p-базисную подгруппу. ∎

В § 35 мы увидим, что группа может содержать много p-базисных подгрупп, но в теореме 35.2 будет доказано, что все они изоморфны между собой.

Пусть B есть p-базисная подгруппа группы A. Соберем в разложении группы B циклические прямые слагаемые одного и того же порядка и образуем их прямую сумму. Тогда мы получим

$$B = B_0 \oplus B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \ldots, \quad (3)$$

где

$$B_0 = \oplus Z, \quad B_n = \oplus Z(p^n) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Для всякого $n \geqslant 1$ подгруппа $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ является p-сервантной, а следовательно, сервантной в A. Так как это ограниченная группа, то в силу теоремы 27.5 она служит для A прямым слагаемым:

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n. \tag{5}$$

Однако подгруппа B_0 в общем случае не является прямым слагаемым группы A. Мы покажем, что подгруппы A_n группы A, входящие в (5), могут быть выбраны так, что

$$A_n = B_{n+1} \oplus A_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Более того, справедлив следующий результат:

Теорема 32.4 (Бэр; Бойер [1]). *Предположим, что B — подгруппа группы A, для которой выполнены равенства* (3) *и* (4). *Подгруппа B является p-базисной подгруппой группы A тогда и только тогда, когда*

а) *B_0 есть p-сервантная подгруппа группы A и*

б) *если $B_n^* = B_0 \oplus B_{n+1} \oplus B_{n+2} \oplus \ldots$, то*

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus (B_n^* + p^nA) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Для p-базисной подгруппы B условие а), очевидно, выполнено. В силу условия 3) всякий элемент $a \in A$ имеет вид $a = b + p^ng$ ($b \in B$, $g \in A$), где n — любое, поэтому подгруппы $B_1, \ldots, B_n$, B_n^* и p^nA вместе порождают группу A. Если элемент $a \in B_n^* + p^nA$ принадлежит также $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$, то запишем $a = c + p^nh$ ($c \in B_n^*$, $h \in A$). Тогда $p^nh \in B$ и, более того, $p^nh \in B_n^*$, что следует из p-сервантности подгруппы B в группе A и строения группы B. Отсюда $a \in B_n^* \cap (B_1 \oplus \ldots \oplus B_n) = 0$, и б) выполнено.

Обратно, если подгруппа B удовлетворяет условиям а) и б), то, прежде всего, условие 1) выполнено тривиальным образом. Из а) следует, что подгруппа B_0 является p-сервантной в $B_n^* + p^nA$, а из б) вытекает, что $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus B_0$ есть p-сервантная подгруппа группы A. Но тогда и подгруппа B как объединение возрастающей последовательности p-сервантных подгрупп группы A p-сервантна в A. Наконец, для доказательства условия 3) запишем элемент $a \in A$ в виде $a = b_1 + \ldots + b_n + c + p^ng$, где $b_i \in B_i$, $c \in B_n^*$, $g \in A$. Тогда $a + B = p^ng + B = p^n(g + B)$ и 3) выполнено.

Упражнения

1 (Куликов [2]). p-группа A является прямой суммой циклических групп тогда и только тогда, когда она содержит такую p-независимую систему элементов S, что

$$\langle S \rangle [p] = A[p].$$

2. (а) p-базисной подгруппой группы J_p является подгруппа Z.

(б) Показать, что подгруппа B_0 в равенстве (3) может не быть прямым слагаемым группы A.

3. (а) Если B_i есть p-базисная подгруппа группы A_i при $i \in I$, то $\oplus B_i$ является p-базисной подгруппой группы $\oplus A_i$.

(б) В каких случаях $\oplus B_i$ служит p-базисной подгруппой для $\prod A_i$?

4. Если B есть p-базисная подгруппа группы A, то nB является p-базисной подгруппой группы nA при любом $n > 0$.

5. p-базис группы A порождает базис группы A/pA. Если A — группа без кручения, то любой базис группы A/pA получается из некоторого p-базиса группы A.

6. Подгруппа C группы A является p-сервантной в A в точности тогда, когда p-базисная подгруппа группы C есть p-сервантная подгруппа группы A.

7. Всякая p-базисная подгруппа p-сервантной подгруппы группы A служит прямым слагаемым для некоторой p-базисной подгруппы группы A.

8. Подгруппы $B_n^* + p^nA$ ($n = 1, 2, \ldots$) из теоремы 32.4 являются абсолютными прямыми слагаемыми группы A.

9 (Шарль). Показать, что p^nA — существенная подгруппа группы $B_n^* + p^nA$.

§ 33. Базисные подгруппы p-групп

Сконцентрируем теперь наше внимание на p-группах, где p-базисные подгруппы особенно важны. Если A есть p-группа и q — простое число, отличное от p, то, очевидно, группа A имеет лишь одну q-базисную подгруппу, а именно 0. Поэтому не вызовет затруднений, если в случае p-групп мы будем называть p-базисные подгруппы просто *базисными* (Куликов [2]).

Иногда бывает также удобно говорить о базисной подгруппе периодической группы A. Под этим подразумевается прямая сумма $\oplus B_p$ подгрупп B_p, являющихся базисными в p-компонентах группы A. Таким образом, базисная подгруппа B периодической группы A определяется следующими условиями:

1) B — прямая сумма циклических групп, порядки которых — степени простых чисел;

2) B — сервантная подгруппа группы A;

3) A/B — делимая группа.

Важное значение имеет следующий пример Л. Я. Куликова [2].

Пример. Пусть B_n — прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^n и A — периодическая часть прямого произведения групп B_n ($n = 1, 2, \ldots$). Тогда *прямая сумма* $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ *является базисной подгруппой группы* A. Напомним, что группа A состоит

из всех таких векторов $a = (b_1, \ldots, b_n, \ldots)$, где $b_n \in B_n$, что существует целое число k, для которого $p^k b_n = 0$ при любом n, а подгруппа B состоит из всех элементов $a \in A$, в которых $b_n = 0$ почти для каждого n. Условия 1) и 2) выполняются очевидным образом, поэтому достаточно доказать, что каждый элемент $a \in A$ делится на p по модулю B. Так как $p^k b_n = 0$, то элемент $a - (b_1 + \ldots + b_k) = (0, \ldots, 0, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots)$ обязательно делится на p, потому что $p \mid b_{k+i}$ в группе B_{k+i} $(i = 1, 2, \ldots)$.

Следующий метод нахождения базисной подгруппы в p-группе A показывает, что здесь существует интересная связь с цоколем $A[p]$. Для любого $n \geqslant 0$ обозначим через S_n цоколь подгруппы $p^n A$. Так как $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \ldots \supseteq S_n \supseteq \ldots$ и каждое S_n — элементарная p-группа, то существуют такие подгруппы P_n $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$S_n = P_{n+1} \oplus S_{n+1} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Очевидно, ненулевые элементы из P_{n+1} имеют в группе A высоту n. Запишем

$$P_{n+1} = \bigoplus_i \langle c_{n+1,\, i} \rangle$$

и выберем такие элементы $a_{n+1,\, i} \in A$, что $p^n a_{n+1,\, i} = c_{n+1,\, i}$. Пусть $B_{n+1} = \bigoplus_i \langle a_{n+1,\, i} \rangle$. Мы утверждаем, что $B = \sum B_n$ — базисная подгруппа группы A. Очевидно, $B = \oplus B_n$, поэтому условие 1) выполнено. Далее, подгруппа B сервантна в A, так как элементы из $B[p] = \oplus B_n[p] = \oplus P_n$ имеют в B и в A одинаковую высоту. Наконец, A/B — делимая группа, так как если $a \in S_0 = P_1 \oplus \ldots \oplus P_{n+1} \oplus \oplus S_{n+1}$ и $a = a_1 + a_2$ $(a_1 \in P_1 \oplus \ldots \oplus P_{n+1}$, $a_2 \in S_{n+1})$, то $a + B = a_2 + B$, откуда следует, что элемент a делится на p^n по модулю B, т. е. $a + B$ имеет в группе A/B бесконечную высоту. Из сервантности подгруппы B в A вытекает, что в каждом смежном классе порядка p из A/B можно выбрать представитель, имеющий порядок p в группе A [см. теорему 28.1]. Поэтому делимость группы A/B следует из п. B) § 20. Это дает доказательство достаточности в следующей теореме:

Теорема 33.1 (Шарль [1]). *Пусть $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, где B_n — прямая сумма групп $Z(p^n)$, есть подгруппа p-группы A. Подгруппа B служит для A базисной подгруппой тогда и только тогда, когда*

$$S_n = B_{n+1}[p] \oplus S_{n+1} \tag{1}$$

для любого $n \geqslant 0$.

Для доказательства необходимости предположим, что B — базисная подгруппа группы A. Тогда для подгруппы $A_n = B_n^* + p^n A$, очевидно, будет выполнено $p^n A = p^n A_n$ [см. теорему 32.4], откуда $S_n = (p^n A)[p] \subseteq A_n[p]$. Если бы здесь было строгое включение, то,

выбрав элемент $a \in A_n[p]$ высоты $r < n$, мы могли бы написать $a = b^* + p^n g$ ($b^* \in B_n^*$, $g \in A$), где $h(b^*) = r$. Из равенства $pb^* + p^{n+1}g = 0$ получилось бы, что $h(pb^*) \geqslant n+1$, что невозможно при $h(b^*) = r < n$ в прямой сумме B_n^* циклических групп порядка $\geqslant p^{n+1}$. Следовательно, $S_n = A_n[p]$, и из разложения $A_n = B_{n+1} \oplus A_{n+1}$ сразу вытекает (1). ∎

Другая полезная характеризация базисных подгрупп такова:

Теорема 33.2 (Селе [7]). *Подгруппа* $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, *где* B_n — *прямая сумма групп* $Z(p^n)$, *служит базисной подгруппой для p-группы A тогда и только тогда, когда при любом целом* $n > 0$ *подгруппа* $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ *является максимальным* p^n*-ограниченным прямым слагаемым* [*или, что эквивалентно,* $p^n A$ — *высокой подгруппой*] *группы A.*

Если B — базисная подгруппа группы A, то $A_n[p]$ не содержит элементов порядка p и высоты $< n$, поэтому A_n не имеет прямых слагаемых порядка $\leqslant p^n$ [см. доказательства теоремы 33.1 и следствия 27.2]. Обратно, если подгруппа B удовлетворяет данным условиям, то 1) и 2), очевидно, выполняются. Если бы факторгруппа A/B не была делимой, то по следствию 27.2 она обладала бы прямым слагаемым $C/B = \langle c^* \rangle \cong Z(p^m)$. По теореме 28.2 тогда $C = B \oplus \langle c \rangle$ ($c \in c^*$), и для группы C тоже справедливы условия 1) и 2). Но $B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \oplus \langle c \rangle$ есть p^m-ограниченная сервантная подгруппа, т. е. прямое слагаемое группы A, строго содержащее $B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$. Противоречие.

Эквивалентность условия, заключенного в скобки, с тем, что было доказано, непосредственно следует из теоремы 27.7. ∎

Последний результат позволяет найти базисную подгруппу в прямом произведении p-групп.

Следствие 33.3. *Пусть A—периодическая часть прямого произведения* $\prod_i A_i$, *где* A_i *являются p-группами, и пусть*

$$B_i = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_{in}, \quad где\ B_{in} = \oplus Z(p^n),$$

—базисная подгруппа группы A_i ($i \in I$). *Тогда*

$$B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n, \quad где\ B_n = \prod_i B_{in},$$

—базисная подгруппа группы A.

Для любого n имеет место разложение $A_i = B_{i1} \oplus \ldots \oplus B_{in} \oplus A_{in}^*$, где подгруппа A_{in}^* не имеет циклических прямых слагаемых порядка $\leqslant p^n$. Ясно, что $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n^*$, где A_n^*—периодическая

часть группы $\prod_i A^*_{in}$, и что A^*_n не имеет циклических прямых слагаемых порядка $\leqslant p^n$. Остается применить теорему 33.2. ∎

Следующая теорема характеризует подгруппы базисных подгрупп. Очевидно ее сходство с теоремой Л. Я. Куликова 17.1.

Теорема 33.4 (Ковач [1]). *Если A есть p-группа, то подгруппа C группы A содержится в базисной подгруппе группы A тогда и только тогда, когда C является объединением возрастающей цепи подгрупп*

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subseteq \ldots,$$

где высоты элементов из C_n [взятые в группе A] ограничены при любом n.

Если подгруппа C может быть вложена в базисную подгруппу $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n = \oplus Z(p^n)$, то подгруппы $C_n = C \cap (B_1 \oplus \ldots \oplus B_n)$ удовлетворяют нужному условию.

Чтобы доказать достаточность, можно без ограничения общности предположить, что $C_n \cap p^nA = 0$ при любом n. Возьмем возрастающие цепи $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_n \subseteq \ldots$ подгрупп группы A, для которых выполнены условия

$$\text{а) } C_n \subseteq G_n, \quad \text{б) } G_n \cap p^nA = 0$$

при любом n. Если в множестве всех таких цепей обычным образом ввести отношение частичного порядка [см. доказательство теоремы 17.1], то по лемме Цорна получится, что существует цепь, максимальная в нашем смысле. Не вызовет осложнений, если мы обозначим ее члены снова через G_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Мы утверждаем, что $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ — базисная подгруппа группы A.

Основной этап доказательства этого факта состоит в том, чтобы показать, что G_n является p^nA-высокой подгруппой группы A. Предположим, напротив, что для некоторого элемента $a \in A$, где $a \notin G_n$, $pa \in G_n$, имеет место равенство $\langle G_n, a\rangle \cap p^nA = 0$. Так как цепь, состоящая из подгрупп G_n, максимальна, то существует такое первое число $m \geqslant n + 1$, что $\langle G_m, a\rangle$ пересекается с p^mA, скажем $a + g_m = p^mb \neq 0$ $(g_m \in G_m, \ b \in A)$. Теперь $pa + pg_m = p^{m+1}b \in G_m \cap p^mA = 0$, откуда $pg_m = -pa \in G_n$. Но $g_m \notin G_n$, так как иначе $a + g_m = p^mb \in \langle G_n, a\rangle \cap p^nA = 0$. Возьмем такой индекс k, что $g_m \in G_{n+k} \setminus G_{n+k-1}$; тогда $1 \leqslant k \leqslant m - n$. Так как G_{n+k-1} — максимальная подгруппа со свойством б) внутри G_{n+k}, то $\langle G_{n+k-1}, g_m\rangle$ пересекается с $p^{n+k-1}A$, скажем $g_{n+k-1} + g_m = p^{n+k-1}c \neq 0$ для некоторых элементов $g_{n+k-1} \in G_{n+k-1}$ и $c \in A$. Отсюда

$$a - g_{n+k-1} = p^mb - p^{n+k-1}c \in \langle G_{n+k-1}, a\rangle \cap p^{n+k-1}A = 0,$$

так как $n + k - 1 < m$ и в силу выбора числа m. Следовательно, $a \in G_{n+k-1} \subseteq G_m$ и $\langle G_m, a\rangle = G_m$ не пересекается с p^mA.

Так как G_n есть p^nA-высокая подгруппа группы A, то G_n служит для A прямым слагаемым [см. теорему 27.7]. Следовательно, $G_{n+1} = G_n \oplus B_{n+1}$ для некоторой подгруппы B_{n+1} группы A. Остальное сразу следует из теоремы 33.2. ∎

Если начать с $C_n = 0$ при всех n, то последнее доказательство даст другой способ построения базисных подгрупп.

Существование базисных подгрупп в p-группах можно интерпретировать следующим образом: каждая p-группа A может быть построена с помощью сервантной подгруппы B, являющейся прямой суммой циклических групп, и делимой факторгруппы A/B. Так как подгруппа B имеет базис, а факторгруппа A/B — прямая сумма групп, изоморфных группе $Z(p^\infty)$ [т. е. A/B также имеет систему образующих, которую легко описать], то естественно объединить эти системы образующих и таким путем получить систему образующих группы A.

Запишем

$$B = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle \quad \text{и} \quad A/B = \bigoplus_{j \in I} C_j^*, \quad \text{где} \quad C_j^* = Z(p^\infty).$$

Если прямое слагаемое C_j^* порождается смежными классами $c_{j1}^*, \ldots, c_{jn}^*, \ldots$ по подгруппе B, для которых $pc_{j1}^* = 0$, $pc_{j,n+1}^* = c_{jn}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то в силу сервантности подгруппы B в группе A можно выбрать элементы $c_{jn} \in c_{jn}^*$ того же порядка, что и c_{jn}^*. Тогда получится следующая система соотношений:

$$pc_{j1} = 0, \; pc_{j,n+1} = c_{jn} - b_{jn} \; (n \geqslant 1; \; b_{jn} \in B), \tag{2}$$

где элемент b_{jn} должен иметь порядок $\leqslant p^n$, так как $o(c_{jn}) = p^n$.

Систему элементов $\{a_i, c_{jn}\}_{i \in I, j \in J, n=1,2,\ldots}$ мы будем называть *квазибазисом* группы A. Эта терминология оправдывается следующим результатом:

Предложение 33.5 (Фукс [2]). *Если $\{a_i, c_{jn}\}$ — квазибазис p-группы A, то любой элемент $a \in A$ можно записать в виде*

$$a = s_1 a_{i_1} + \ldots + s_m a_{i_m} + t_1 c_{j_1 n_1} + \ldots + t_r c_{j_r n_r}, \tag{3}$$

где s_i и t_j — целые числа, ни одно t_j не делится на p и индексы $i_1, \ldots, i_m$, так же как и индексы $j_1, \ldots, j_r$, все различны. Запись (3) единственна в том смысле, что в ней однозначно определены члены sa_i и tc_{jn}.

Пусть $a \in A$. Выразим сначала смежный класс $a^* = a + B$ через c_{jn}^*: $a^* = t_1 c_{j_1 n_1}^* + \ldots + t_r c_{j_r n_r}^*$, где ни одно $t \in \mathbf{Z}$ не делится на p. Тогда члены tc_{jn}^* и, таким образом, tc_{jn} определяются элементом a однозначно. Если выразить элемент $a - t_1 c_{j_1 n_1} - \ldots - t_r c_{j_r n_r}$ в виде линейной комбинации базисных элементов a_i группы B, то получится равенство (3), где sa_i опять определены однозначно, так как B — прямая сумма циклических групп. ∎

С помощью квазибазиса p-группа может быть определена довольно простым образом, так как определяющие соотношения, относящиеся к образующим $\{a_i, c_j\}$, будут иметь вид $p^m a_i = 0$ и (2), где элементы b_{jn} заменены линейными комбинациями образующих a_i.

Упражнения

1 (Бурбаки [1]). Назовем систему элементов $\{a_i\}_{i \in I}$ группы A *сервантно независимой*, если она независима и порождает сервантную подгруппу группы A. Доказать, что

(а) система $\{a_i\}$ сервантно независима тогда и только тогда, когда из $mb = n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k$ вытекает $n_j a_j = mn'_j a_j$ $(j = 1, \ldots, k)$;

(б) всякую сервантно независимую систему можно вложить в максимальную;

(в) сервантно независимая система S элементов p-группы A является максимальной тогда и только тогда, когда $A/\langle S\rangle$ — делимая группа;

(г) максимальная сервантно независимая система элементов служит базисом для некоторой базисной подгруппы p-группы A.

2. Если базисная подгруппа B p-группы A является характеристической подгруппой группы A, то или $B = A$, или $B = 0$.

3. (а) Всякая счетная подгруппа p-группы A без элементов бесконечной высоты содержится в базисной подгруппе группы A.

(б) Если отбросить требование счетности, утверждение перестанет быть верным.

4. (а) Пусть D — делимая группа, содержащая p-группу A, и $B = \bigoplus_i \langle a_i\rangle$ — базисная подгруппа группы A. Вложить каждую подгруппу $\langle a_i\rangle$ в квазициклическую подгруппу D_i группы D и показать, что $E = A + \sum_i D_i$ — минимальная делимая группа, содержащая группу A.

(б) Использовать пункт (а) для доказательства того, что всякую p-группу можно вложить в минимальную делимую группу.

5 (Ирвин [1]). Если A есть p-группа, то всякая A^1-высокая подгруппа группы A содержит базисную подгруппу группы A. [*Указание*: см. § 26, упр. 12.]

6. Дать определение чисто независимой системы элементов [см. упр. 1] и доказать, что

(а) всякую чисто независимую систему можно вложить в максимальную;

(б) любой элемент цоколя факторгруппы по подгруппе, порожденной максимальной чисто независимой системой элементов, делится на любое простое число;

(в) максимальная чисто независимая система элементов p-группы может не быть сервантно независимой.

7. Если группа A имеет нулевую p-компоненту, то группа A/B обладает тем же свойством для любой p-базисной подгруппы B группы A.

§ 34. Дальнейшие результаты о p-базисных подгруппах

В этом параграфе мы докажем ряд полезных результатов, касающихся p-базисных подгрупп. Большая часть из них была получена Л. Я. Куликовым для p-групп, но результаты немедленно переносятся на общий случай.

Везде в этом параграфе A будет обозначать произвольную группу, B — ее p-базисную подгруппу.

А) $A = B + p^nA$ *для любого целого* $n \geqslant 0$.

Это непосредственно следует из p-делимости группы A/B.

Б) $B/p^nB \cong A/p^nA$ *для любого целого* $n \geqslant 0$.

В силу А) и второй теоремы об изоморфизме $A/p^nA = (B + p^nA)/p^nA \cong B/(B \cap p^nA)$. Здесь $B \cap p^nA = p^nB$, так как подгруппа B является p-сервантной в группе A.

В) $p^nA/p^nB \cong A/B$ *для любого целого* $n \geqslant 0$.

Доказательство то же, что и в предыдущем случае.

Г) *Если B' есть p-базисная подгруппа p-базисной подгруппы B группы A, то B' является p-базисной подгруппой группы A.*

Нетривиальным является только доказательство того, что A/B' есть p-делимая группа. Но это следует из p-делимости групп A/B и B/B'.

Д) *Если C есть p-сервантная подгруппа группы A, то группа A/C является p-делимой тогда и только тогда, когда некоторая [более того, любая] p-базисная подгруппа группы C служит p-базисной подгруппой для группы A.*

Если A/C есть p-делимая группа, а B является p-базисной подгруппой группы C, то непосредственно проверяется, что B есть p-базисная подгруппа группы A. Обратно, если подгруппа C содержит p-базисную подгруппу B группы A, то A/C — эпиморфный образ p-делимой группы A/B.

Е) *Пусть $A_0 = A/A^1$ — нулевой ульмовский фактор группы A. Тогда если B есть p-базисная подгруппа группы A, то ее образ B_0 при естественном эпиморфизме φ: $A \twoheadrightarrow A_0$ является p-базисной подгруппой группы A_0, причем φ индуцирует изоморфизм между B и B_0.*

Так как элементы из A^1 делятся на любую степень числа p, то $B \cap A^1 = 0$. Поэтому $\varphi | B$ — изоморфизм группы B и некоторой подгруппы B_0 группы A_0; в частности, B_0 — прямая сумма циклических групп бесконечного порядка и порядков, равных степеням числа p. Если $\{a_i\}_{i \in I}$ — базис группы B, то $\{\varphi a_i\}_{i \in I}$ — базис группы B_0, который должен быть p-независимым в группе A_0, так как если $n_1\varphi a_1 + \ldots + n_k\varphi a_k \in p^rA_0$ и $n_i\varphi a_i \neq 0$, то $n_1a_1 + \ldots + n_ka_k \in p^rA$, откуда $p^r \mid n_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Поэтому B_0 есть p-сервантная подгруппа группы A_0 [см. лемму 32.1]. Наконец, факторгруппа A_0/B_0 является p-делимой группой, так как она изоморфна

$(A/A^1)/[(B+A^1)/A^1] \cong A/(B+A^1)$, а эта группа — эпиморфный образ группы A/B.

Ж) *Пусть C есть p-сервантная подгруппа группы A, $\{a_i\}$ есть p-базис группы C и $\{b_j^*\}$ есть p-базис группы $A/C=A^*$. Если для любого j элемент $b_j \in A$ — представитель смежного класса b_j^*, имеющий тот же порядок, что и b_j^*, то $\{a_i, b_j\}$ есть p-базис группы A.*

Порядки элементов b_j^* равны степеням числа p или бесконечны, поэтому p-сервантность подгруппы C в группе A обеспечивает существование элементов $b_j \in A$ с нужным свойством. Чтобы доказать p-независимость системы $\{a_i, b_j\}$, предположим, что

$$n_1a_1+\ldots+n_sa_s+m_1b_1+\ldots+m_tb_t=p^rg \ (g\in A),$$

причем все слагаемые отличны от нуля. Переходя к факторгруппе по подгруппе C, получаем $m_1b_1^*+\ldots+m_tb_t^*=p^rg^*$, где слагаемые также отличны от нуля, откуда $p^r \mid m_j$ при каждом j. Отсюда получаем $n_1a_1+\ldots+n_sa_s=p^rh$ для некоторого $h\in A$, и, таким образом, $p^r \mid n_i$ при любом i, что доказывает p-независимость системы $\{a_i, b_j\}$. Для любого элемента $a\in A$ имеет место соотношение $a+m_1b_1+\ldots+m_lb_l=c+pg$, где $c\in C$, $g\in A$, а для элемента c справедливо соотношение $c+n_1a_1+\ldots+n_ka_k=pd$, где $d\in C$. Следовательно, элемент a в сумме с некоторой линейной комбинацией элементов a_i и b_j дает элемент из pA, откуда вытекает, что $\{a_i, b_j\}$ — максимальная p-независимая система элементов.

Отсюда следует, что при тех же предположениях *p-базисная подгруппа группы A изоморфна прямой сумме p-базисных подгрупп групп C и A/C.*

З) При некоторых довольно общих условиях эндоморфизмы группы вполне определяются их действием на p-базисную подгруппу.

Предложение 34.1. *Пусть группа A не содержит ненулевых p-делимых подгрупп, и пусть B есть p-базисная подгруппа группы A. Если χ, η — эндоморфизмы группы A, индуцирующие одно и то же отображение на B, то $\chi=\eta$.*

Ядро эндоморфизма $\chi-\eta$ содержит B, поэтому $\mathrm{Im}(\chi-\eta)$ — эпиморфный образ группы A/B. Следовательно, $\mathrm{Im}(\chi-\eta)$ есть p-делимая подгруппа группы A, т. е. 0. ∎

И) Для p-групп справедлива

Теорема 34.2 (Фукс [4]). *Если G — эпиморфный образ p-группы A, то всякая базисная подгруппа группы G является эпиморфным образом любой базисной подгруппы группы A.*

Пусть B и C — базисные подгруппы групп A и G соответственно. Ограничение эпиморфизма $\varphi\colon A\to G$ на p^nA является эпиморфизмом $\varphi_n\colon p^nA\to p^nG$, индуцирующим эпиморфизм $\varphi_n^*\colon p^nA/p^{n+1}A\to \to p^nG/p^{n+1}G$. Как в п. Б), получаем, что $p^nA/p^{n+1}A\cong p^nB/p^{n+1}B$

и $p^nG/p^{n+1}G \cong p^nC/p^{n+1}C$. Заметим, что $p^nB/p^{n+1}B$ — прямая сумма групп порядка p, где число слагаемых равно числу слагаемых в группе B, имеющих порядок $\geqslant p^{n+1}$, и то же верно для группы C. Из существования эпиморфизма $p^nB/p^{n+1}B \to p^nC/p^{n+1}C$ вытекает соответствующее неравенство для мощностей множеств компонент порядка $\geqslant p^{n+1}$ в B и C, $n = 0, 1, \ldots$. Учитывая, что B и C — прямые суммы циклических групп, получаем, что существует эпиморфизм $B \to C$. ∎

В частности, *если прямая сумма циклических групп является эпиморфным образом p-группы A, то та же прямая сумма — эпиморфный образ базисной подгруппы группы A* (Селе [7]).

K) Следующая теорема дает оценку сверху мощности группы, использующую ее p-базисные подгруппы.

Теорема 34.3. *Если A — редуцированная группа и B_p для каждого простого числа p — ее p-базисная подгруппа, то*

$$|A| \leqslant \left(\sum_p |B_p|\right)^{\aleph_0}.$$

Пусть B — подгруппа группы A, порожденная всеми подгруппами B_p [по одной для каждого p]. Тогда группа A/B является p-делимой при каждом p, т. е. делимой, и можно написать $A/B = \bigoplus_i (C_i/B)$, где $C_i/B \cong Q$ или $C_i/B \cong Z(p^\infty)$. Если $C_i/B \cong Q$, то существуют такие элементы $c_{i1}, \ldots, c_{in}, \ldots \in C_i$, что $c_{in} = (n+1)\, c_{i,\, n+1} + b_{in}$ для некоторых $b_{in} \in B$. Если бы при $i \neq j$ последовательности $b_{i1}, \ldots$ $\ldots, b_{in}, \ldots$ и $b_{j1}, \ldots, b_{jn}, \ldots$ совпадали, то элементы

$$c_{in} - c_{jn} = (n+1)\,(c_{i,\, n+1} - c_{j,\, n+1}) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

порождали бы в группе A подгруппу, изоморфную группе Q, что противоречило бы редуцированности группы A. Следовательно, число групп, изоморфных Q, среди групп C_i/B не превосходит мощности множества последовательностей $b_{i1}, \ldots, b_{in}, \ldots$ элементов из B, а эта мощность, очевидно, равна $|B|^{\aleph_0}$. То же справедливо для числа групп C_i/B, изоморфных $Z(p^\infty)$. Теперь нужная оценка получается из того, что $|B| \leqslant \sum_p |B_p|$, причем принимается во внимание, что подгруппа B может быть конечной только в случае, когда группа A конечна. ∎

Для p-групп мы, в частности, имеем

Следствие 34.4 (Куликов [3]). *Если B — базисная подгруппа редуцированной p-группы A, то*

$$|A| \leqslant |B|^{\aleph_0}. \ ∎$$

Заметим, что может быть $|B| < |A|$ и одновременно $|A| = |B|^{\aleph_0}$. В самом деле, если A — периодическая часть прямого произведения циклических групп $Z(p^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то подгруппа B счетна, а группа A имеет мощность континуума [см. пример в § 33].

Следствие 34.5. *Для редуцированной группы A и ее нулевого ульмовского фактора A_0 справедливо неравенство*

$$|A| \leqslant |A_0|^{\aleph_0}.$$

Сохраняя обозначения теоремы 34.3, мы из п. E) получаем, что $\sum_p |B_p| \leqslant |A_0|$. Объединение этого с теоремой 34.3 дает требуемое неравенство. ∎

Тот факт, что оценка сверху мощности группы A может быть дана с помощью ее нулевого ульмовского фактора, является замечательным результатом.

Упражнения

1. Если B есть p-базисная подгруппа группы A, то

(а) $p^nA = p^nB + p^{n+k}A$ для любых неотрицательных целых чисел n, k;

(б) $p^nB/p^{n+k}B \cong p^nA/p^{n+k}A$ при n и $k \geqslant 0$.

2. Если B есть p-базисная подгруппа группы A, то

(а) $(A/B)[p] \cong A[p]/B[p]$;

(б) $(p^nA/p^nB)[p] \cong (p^nA)[p]/(p^nB)[p]$ для любого $n \geqslant 0$;

(в) $(p^nA)[p] = (p^nB)[p] + (p^{n+1}A)[p]$ для любого $n \geqslant 0$;

(г) $(p^{n+1}B)[p] = (p^nB)[p] \cap (p^{n+1}A)[p]$ для любого $n \geqslant 0$;

(д) $(p^nB)[p]/(p^{n+1}B)[p] \cong (p^nA)[p]/(p^{n+1}A)[p]$

для любого $n \geqslant 0$.

3. Какие из свойств (а) — (д) в упр. 2 останутся справедливыми, если везде заменить $[p]$ на $[p^k]$, где $k \geqslant 2$?

4. Привести пример редуцированной группы A и нетривиальной подгруппы B в ней, являющейся p-базисной подгруппой группы A при любом простом p.

5. Не всякий гомоморфизм базисной подгруппы p-группы A в группу A можно продолжить до эндоморфизма группы A.

6. Пусть $0 \to A \to G \to C \to 0$ есть p-сервантная точная последовательность, и пусть подгруппы A_p, C_p являются p-базисными подгруппами соответственно групп A и C. Существует такая p-базисная подгруппа B_p группы G, что последовательность $0 \to A_p \to B_p \to \to C_p \to 0$, где отображения индуцированные, точна и расщепляется. [*Указание*: см. п. Ж).]

7. Обобщить теорему 34.2 на случай p-базисных подгрупп произвольных групп. [*Указание*: см. вторую часть доказательства теоремы 35.2.]

8. Если F — подгруппа Фраттини редуцированной группы A, то

$$|A| \leqslant |A/F|^{\aleph_0}.$$

9 (Уокер Э. [3]). Доказать следующее обобщение теоремы 34.3: если A — редуцированная группа и B — такая подгруппа группы A, что A/B — делимая группа, то $|A| \leqslant |B|^{\aleph_0}$.

§ 35. Различные p-базисные подгруппы

Прежде всего мы покажем, что группа, вообще говоря, содержит много различных p-базисных подгрупп.

Лемма 35.1. *Пусть* $A = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \langle a_k \rangle$, *где или* $o(a_k) = p^{n_k}$, $n_1 < \ldots < n_k < \ldots$, *или* $o(a_k) = \infty$ *для любого* k. *Тогда группа* A *содержит* p*-базисную подгруппу* B, *отличную от* A.

Положим

$$b_k = a_k - p^{n_{k+1}-n_k} a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где в случае, когда все элементы a_k имеют бесконечный порядок, $n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. Легко показать, что $\{b_k\}_{k=1, 2, \ldots}$ есть p-независимая система и что подгруппа B, порожденная элементами b_k, не содержит a_1. Так как, очевидно, A/B есть p-делимая группа [именно, группа, изоморфная $Z(p^\infty)$ или $Q^{(p)}$], то B есть p-базисная подгруппа группы A. ∎

Начав с группы A, как описано в лемме, мы получим p-базисную подгруппу B, которая будет удовлетворять тем же условиям, что и группа A, и, таким образом, будет содержать p-базисную подгруппу $B_2 \subset B$. Продолжая так же дальше, мы получим бесконечную строго убывающую цепочку

$$A \supset B \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots,$$

в которой в силу п. Г) § 34 все группы B_n будут p-базисными подгруппами группы A. Тем не менее имеет место

Теорема 35.2 (Куликов [2], Фукс [9]). *Для заданного простого числа* p *все* p*-базисные подгруппы данной группы изоморфны.*

Пусть $B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$, где $B_0 = \oplus Z$, $B_n = \oplus Z(p^n)$ при $n \geqslant 1$, есть p-базисная подгруппа группы A. Мощность множества слагаемых $Z(p^n)$, входящих в разложение группы B_n, равна мощности множества слагаемых $Z(p^n)$, входящих в разложение группы B/p^kB, для любого $k > n$. Из утверждения Б) § 34 мы знаем, что $B/p^kB \cong A/p^kA$. Следовательно, эта мощность не зависит от специального выбора p-базисной подгруппы B группы A.

Чтобы доказать единственность с точностью до изоморфизма подгруппы B_0, установим сначала справедливость равенства

$$pB_0 = B_0 \cap (T_p + pA), \tag{1}$$

где T_p есть p-компонента группы A. Включение $\subseteq$ очевидно. Пусть $b_0 \in B_0 \cap (T_p + pA)$, $b_0 = c + pa$, где $c \in T_p$, $a \in A$. Существует

число n, для которого $p^n b_0 = p^{n+1}a \in B_0 \cap p^{n+1}A = p^{n+1}B_0$, т. е. $p^n b_0 = p^{n+1}b$ при некотором $b \in B_0$. В силу того, что B_0 — группа без кручения, $b_0 = pb \in pB_0$, что доказывает (1). Далее,

$$B_0/pB_0 = B_0/[B_0 \cap (T_p + pA)] \cong (B_0 + T_p + pA)/(T_p + pA) = \\ = A/(T_p + pA);$$

здесь мы использовали тот факт, что $B_0 + T_p + pA \supseteq B + pA = A$. Мы приходим к заключению, что ранг группы B_0, который, очевидно, равен рангу группы B_0/pB_0, не зависит от конкретного выбора подгруппы B_0. ∎

Предыдущая теорема показывает, что p-базисная подгруппа B, рассматриваемая как абстрактная группа, является инвариантом группы A. Это дает систему $\{\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n, \ldots\}$ кардинальных чисел, являющихся инвариантами группы A; именно,

$$B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n, \quad \text{где} \quad B_0 = \bigoplus_{\mathfrak{m}_0} Z, \quad B_n = \bigoplus_{\mathfrak{m}_n} Z(p^n) \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Таким образом, со всякой группой A и любым простым числом p можно связать счетную систему кардинальных чисел, которые являются инвариантами группы A [но это не полная система инвариантов].

Естественно возникает вопрос, каковы те группы, которые содержат лишь одну p-базисную подгруппу. Их немного.

Теорема 35.3. *Группа A содержит в точности одну p-базисную подгруппу тогда и только тогда, когда она имеет один из следующих видов*:

а) *A есть p-делимая группа*;

б) *$A = B \oplus C$, где B — ограниченная p-группа, а C есть p-делимая группа, не содержащая элементов порядка p*;

в) *$A = B \oplus C$, где B — ограниченная p-группа, а C — свободная группа конечного ранга.*

Предположим, что группа A имеет только одну p-базисную подгруппу B'. Тогда подгруппа B' не может иметь прямого слагаемого, являющегося свободной группой бесконечного ранга или неограниченной p-группой, так как иначе в силу леммы 35.1 и п. Д) § 34 мы получим противоречие с единственностью B'. Следовательно, $B' = B_0 \oplus B_1$, где B_0 — свободная группа конечного ранга, а B_1 — ограниченная p-группа. Если $B_0 = B_1 = 0$, то получается а). Если $B_0 = 0$, но $B_1 \neq 0$, то $B' = B_1$ служит для группы A прямым слагаемым [как ограниченная сервантная подгруппа], т. е. $A = B' \oplus C$. Здесь C есть p-делимая группа, не содержащая элементов порядка p, так как если $0 \neq c \in C[p]$ и b — один из базисных элементов группы B', то элемент b можно заменить на $b + c$ и получится p-базисная подгруппа, отличная от B'. Наконец, если $B_0 \neq 0$, то B' не может строго содержаться в A, так как иначе можно заменить базисный

элемент b группы B_0 элементом $b + pc$, где элемент $c \in A$ не зависит от B', и получить другую p-базисную подгруппу. Этим необходимость условий а), б), в) доказана.

Если выполнено условие а), то 0 — единственная p-базисная подгруппа группы A. В случае б) подгруппа B является p-базисной в A, и по теореме 35.2 всякая p-базисная подгруппа B' группы A должна содержаться в p-компоненте B группы A. Далее, $B/B' = 0$ как ограниченная p-делимая группа. Следовательно, B — единственная p-базисная подгруппа группы A. Наконец, если A — группа типа в), то она сама является своей p-базисной подгруппой. Если B' — какая-то p-базисная подгруппа группы A, то для соответствующего n группа $p^n(A/B') = A/B'$ является эпиморфным образом конечно порожденной группы C. Следовательно, $A/B' = 0$ и $B' = A$. ∎

Следствие 35.4 (Куликов [2]). *p-группа обладает единственной базисной подгруппой тогда и только тогда, когда она или делимая, или ограниченная группа.* ∎

Понятие базисной подгруппы может быть довольно очевидным образом распространено на p-адические модули. Так как все p-адические модули q-делимы для простых чисел $q \neq p$, то только p-базисные подмодули могут дать что-нибудь нетривиальное. В p-адическом модуле A базисный подмодуль B определяется точно так же, как базисная подгруппа в § 33, только условие 1) заменяется условием

1′) B есть прямая сумма циклических p-адических модулей,

т. е. B имеет компоненты J_p или $Z(p^k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Читатель может для себя проверить, что для p-адических модулей верны утверждения 32.1—32.3 и теорема 35.2. Для удобства сформулируем это в следующем виде.

Теорема 35.5. *Всякий p-адический модуль содержит базисные подмодули, которые все изоморфны между собой.* ∎

В оставшейся части этого параграфа мы ограничимся рассмотрением p-групп.

Пусть A — неограниченная редуцированная p-группа. Если B — базисная подгруппа группы A, то она неограниченная и поэтому содержит базисные подгруппы, отличные от B [см. лемму 35.1]. Поэтому, вообще, A/B не является инвариантом группы A даже в случае, когда A — прямая сумма циклических p-групп неограниченных порядков. Так как A/B — прямая сумма групп $Z(p^\infty)$, то $r(A/B)$ уже характеризует группу A/B, а так как всякое непустое множество кардинальных чисел содержит минимальный элемент, то мы можем выбрать базисную подгруппу B_u группы A, для которой ранг $r(A/B_u)$ минимален. Такая подгруппа B_u называется *верхней базисной подгруппой* группы A. Хотя для верхних базисных подгрупп B_u группы A и подгруппа B_u и факторгруппа A/B_u определены однозначно с точ-

ностью до изоморфизма, подгруппа B_u как подмножество не единственна. Более того, если ранг $r(A/B_u)$ бесконечен, то верхняя базисная подгруппа содержит другую верхнюю базисную подгруппу.

Следующий пример показывает, что для редуцированных групп A возможно $r(A/B_u) = 1$.

Пример (Прюфер [2]). Пусть группа $A = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ задана определяющими соотношениями

$$pa_0 = 0, \quad pa_1 = a_0, \quad p^2 a_2 = a_0, \ldots, p^n a_n = a_0, \ldots .$$

Тогда $o(a_n) \leqslant p^{n+1}$. Если $C = Z(p^\infty)$ определено как в (1) из § 3, то $a_n \mapsto c_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ порождает эпиморфизм $A \to C$, откуда $o(a_n) = p^{n+1}$. Так как элемент $a_0 \neq 0$ имеет бесконечную высоту, то группа A не может быть прямой суммой циклических групп. Заметим, что всякий элемент $a \in A$ можно записать в виде $a = t_0 a_0 + t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n$, где $0 \leqslant t_i < p^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $0 \leqslant t_0 < p$. Если здесь $t_n a_n \neq 0$ $(n \geqslant 1)$, то отображение $a_0, \ldots, a_{n-1} \mapsto 0$, $a_m \mapsto c_m$ (для $m \geqslant n$) продолжается до эпиморфизма φ: $A \to C$, где $\varphi a \neq 0$. Это показывает, что $a = 0$ только при $t_0 a_0 = \ldots = t_n a_n = 0$. Теперь легко показать, что группа A редуцированная и что $a_1 - pa_2, \ldots, a_n - pa_{n+1}, \ldots$ есть p-базис группы A. Подгруппа B, им порожденная, является верхней базисной подгруппой, так как, очевидно, $A/B \cong Z(p^\infty)$. Таким образом, $r(A/B) = 1$, что и требовалось.

Для рангов $r(A/B)$ факторгрупп A/B по базисным подгруппам B существует верхняя граница, а именно $r(A)$. Следовательно, для $r(A/B)$ существует наименьшая верхняя граница. Она легко описывается. Назовем *финальным рангом* (Селе [7]) p-группы A минимум кардинальных чисел $r(p^n A)$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\operatorname{fin} r(A) = \inf_n r(p^n A).$$

В силу п. B) § 34, $r(A/B) = r(p^n A/p^n B) \leqslant r(p^n A)$, откуда следует, что $r(A/B) \leqslant \operatorname{fin} r(A)$. Назовем базисную подгруппу B_l группы A *нижней базисной подгруппой*, если $r(A/B_l) = \operatorname{fin} r(A)$. Существование нижних базисных подгрупп устанавливается в следующей теореме.

Теорема 35.6 (Фукс [2]). *В p-группе всякая базисная подгруппа содержит нижнюю базисную подгруппу.*

Если A есть p-группа и $\operatorname{fin} r(A)$ конечен, то для любой базисной подгруппы B группы A имеем $\operatorname{fin} r(B) \leqslant \operatorname{fin} r(A)$ и $\operatorname{fin} r(B) = 0$, так как B — прямая сумма циклических групп. Это означает, что группа B ограниченная. Тогда всякая базисная подгруппа группы A ограниченная и поэтому нижняя.

Предположим теперь, что $\operatorname{fin} r(A)$ бесконечен. Если базисная подгруппа B группы A не нижняя, то $r(A/B) < \operatorname{fin} r(A)$, и из п. B) § 34 получаем

$$r(p^n A/p^n B) < \operatorname{fin} r(A) \leqslant r(p^n A).$$

Отсюда $r(p^nB) = r(p^nA)$. Из этого равенства вытекает, что мощность множества циклических прямых слагаемых $\langle a_i \rangle$ порядка $> p^n$ в группе B не меньше $\operatorname{fin} r(A)$ для любого n. Поэтому группу B можно представить в виде прямой суммы групп C_j, где каждая группа C_j — прямая сумма циклических групп, порядки которых не ограничены в совокупности, и j пробегает множество индексов мощности $\operatorname{fin} r(A)$. Применяя лемму 35.1, получаем, что каждая группа C_j содержит базисную подгруппу $B_j \subset C_j$. Прямая сумма B' всех этих подгрупп B_j, очевидно, является базисной подгруппой группы B и, следовательно, группы A. Базисная подгруппа B' нижняя, так как по построению $r(A/B') \geqslant r(B/B') = \sum_j r(C_j/B_j) \geqslant \operatorname{fin} r(A)$. ∎

Упражнения

1. Показать, что в p-группе $A = B \oplus C$, где B — конечная группа, C — делимая группа конечного ранга m, число различных базисных подгрупп равно $|B|^m$.

2. Охарактеризовать группы с конечным числом p-базисных подгрупп.

3 (Кхаббаз и Уокер [1], Хилл [1]). Если A есть p-группа с бесконечным числом различных базисных подгрупп B, то мощность множества различных базисных подгрупп группы A равна $|A|^{|B|}$.

4. Для любой базисной подгруппы B в p-группе A справедливо неравенство $r(A/B) \geqslant r(A^1)$, где A^1 — первая ульмовская подгруппа группы A.

5. Для заданного кардинального числа $\mathfrak{m}$ построить редуцированную p-группу A, в которой $r(A/B_u) = \mathfrak{m}$, если B_u — верхняя базисная подгруппа группы A.

6. Если A — периодическая часть группы $\prod_{n=1}^{\infty} Z(p^n)$, то всякая базисная подгруппа группы A является одновременно нижней и верхней.

7. Если $\mathfrak{n}$ — такое кардинальное число, что $r(A/B_u) \leqslant \mathfrak{n} \leqslant r(A/B_l)$ для верхней базисной подгруппы B_u и нижней базисной подгруппы B_l в p-группе A, то группа A обладает базисной подгруппой B, для которой $r(A/B) = \mathfrak{n}$.

8 (Скотт [1]). (а) Пусть A есть p-группа бесконечного ранга $\mathfrak{m}$. Тогда A обладает эпиморфным образом, изоморфным $\bigoplus_{\mathfrak{m}} C$, где группа C — или квазициклическая, или группа порядка p. [*Указание*: рассмотреть A/B_l или A/pA.]

(б) Существует $2^{\mathfrak{m}}$ различных подгрупп G группы A, для которых

$$A/G \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}} C.$$

9. (а) Пересечение всех базисных подгрупп p-группы A совпадает или с A, или с 0.

(б) Если A есть p-группа, обладающая такой базисной подгруппой B, что $r(B) \leqslant \operatorname{fin} r(A)$, то группа A содержит две непересекающиеся базисные подгруппы.

(в) (Митчелл и Митчелл [1]) Если $|A| = \operatorname{fin} r(A)$, то группа A содержит две непересекающиеся базисные подгруппы.

10. Если A есть p-группа и $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число, то $\operatorname{fin} r(A) \geqslant \mathfrak{m}$ тогда и только тогда, когда группа A содержит подгруппу, изоморфную

$$\bigoplus_{\mathfrak{m}} G, \quad \text{где} \quad G = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z(p^n).$$

11 (Фукс [3]). *Любую p-группу A можно представить в виде $A = A' \oplus A''$, где A' — ограниченная группа и $r(A'') = \operatorname{fin} r(A'')$.* [*Указание*: если $\operatorname{fin} r(A) = r(p^m A)$ и $B = \oplus B_n$, где $B_n = \oplus Z(p^n)$, есть базисная подгруппа группы A, то положить $A' = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$.]

12. Описать все p-группы, в которых всякая максимальная p-независимая система элементов является максимальной независимой.

13. Доказать аналог теоремы 35.3 для p-адических модулей.

§ 36. Базисные подгруппы как эндоморфные образы

В этом параграфе мы сосредоточим внимание на p-группах A и их базисных подгруппах B.

Если группа A редуцированная, то, как показано в предложении 34.1, всякий эндоморфизм группы A определяется его действием на B. Другое интересное свойство базисных подгрупп было найдено Селе.

Теорема 36.1 (Селе [7]). *Базисная подгруппа p-группы A является эндоморфным образом группы A.*

Пусть $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n = \oplus Z(p^n)$,— базисная подгруппа группы A. Если $\operatorname{fin} r(B) = r(p^m B)$, то для этого m можно написать разложение $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \oplus B_m^*$. Циклические слагаемые $\langle a_i \rangle$ группы B_m^* имеют порядок $> p^m$. Используем их для построения отображения $f\colon \langle a_i \rangle \mapsto \langle a_j \rangle$ множества $\mathfrak{D}$ прямых слагаемых в фиксированном разложении группы B_m^* в себя. Отображение f определяем так, что

1) f — взаимно однозначное соответствие межде $\mathfrak{D}$ и подмножеством $\mathfrak{D}'$ из $\mathfrak{D}$;

2) если $f\colon \langle a_i \rangle \mapsto \langle a_j \rangle$, где $e(a_i) = k_i$, $e(a_j) = k_j$, то $k_j \geqslant 2k_i$.

Выбор числа m обеспечивает то, что для любого $k \geqslant m$ множество $\mathfrak{D}$ содержит $\operatorname{fin} r(B)$ слагаемых $\langle a_i \rangle$ порядка $\geqslant p^k$, поэтому нужное

отображение f существует. Определим теперь отображение ε подмножества из B следующим образом:

а) $\varepsilon a = a$, если $a \in B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$;
б) $\varepsilon a_j = a_i$, если $\langle a_j \rangle \in \mathfrak{D}'$ и f: $\langle a_i \rangle \mapsto \langle a_j \rangle$;
в) $\varepsilon a_j = 0$, если $\langle a_j \rangle \notin \mathfrak{D}'$.

Очевидно, отображение ε индуцирует однозначно определенный эндоморфизм группы B на себя, который мы опять обозначим через ε. Полученное отображение следующим образом продолжим до эндоморфизма η: $A \to B$. Если элемент $a \in A$ имеет порядок p^r, то напишем $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n$ $(n \geqslant 2r, \quad n \geqslant m)$, $a = b + c$, $b \in B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$, $c \in A_n$, и положим $\eta a = \varepsilon b$. Это определение не зависит от выбора n $(\geqslant 2r, m)$, так как компонента элемента a в прямом слагаемом B_s разложения $B_1 \oplus \ldots \oplus B_s \oplus A_s$ делится на p^{s-r} и поэтому переводится отображением ε в 0, если $s \geqslant 2r$, $s \geqslant m$. Тот факт, что η переводит сумму элементов в сумму их образов, очевиден. Следовательно, η — эндоморфное отображение группы A на подгруппу B. ∎

Следствие 36.2. *Если прямая сумма C циклических групп является сервантной подгруппой p-группы A, то C — эндоморфный образ группы A.*

Базис группы C является p-независимым в A, поэтому его можно расширить до p-базиса группы A. По теореме 36.1 подгруппа B, порожденная этим p-базисом, служит эндоморфным образом для группы A. Но тогда и подгруппа C как прямое слагаемое группы B — эндоморфный образ группы A.

Упражнения

1 (Селе [7]). Всякая p-группа мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ [где $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число] является эпиморфным образом p-группы A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m} \leqslant \operatorname{fin} r(B)$, где B — базисная подгруппа группы A.

2. Пусть A — группа без кручения. Ее p-базисная подгруппа B является эндоморфным образом группы A тогда и только тогда, когда A имеет прямое слагаемое, являющееся свободной группой ранга $r(B)$.

3. При каких условиях базисный подмодуль p-адического модуля A является эндоморфным образом модуля A? [*Указание*: см. упр.2.]

4. Установить необходимое и достаточное условие для существования эпиморфизма $B \to A$, где B — базисная подгруппа p-группы A.

§ 37. Последовательность Ульма

Мы уже ввели в рассмотрение ульмовские подгруппы и ульмовские факторы [см. § 6], но мы пока еще не касались некоторых важных результатов, с ними связанных. Из этих результатов в дальнейшем

изложении будет выведен ряд следствий, в то же время они проливают некоторый свет на строение групп вообще. Так как сейчас мы в состоянии установить наиболее важные свойства последовательности Ульма, мы рассмотрим этот важный инвариант группы.

Напомним, что если σ — порядковое число, то σ-я ульмовская подгруппа A^σ группы A определялась индуктивно следующим образом: $A^0 = A$, $A^{\sigma+1} = \bigcap_n nA^\sigma$ и, если σ — предельное порядковое число, $A^\sigma = \bigcap_{\rho<\sigma} A^\rho$. *Ульмовской длиной* $u(A)$ группы A называется наименьшее порядковое число τ, для которого $A^{\tau+1} = A^\tau$. Очевидно, такое τ существует и не превосходит $|A|$. Ясно также, что A^τ — максимальная делимая подгруппа группы A. Поэтому, если ограничиться редуцированными группами A, что можно сделать без потери общности, то будет иметь место $A^\tau = 0$ и мы получим вполне упорядоченную убывающую цепь подгрупп группы A:

$$A = A^0 \supset A^1 \supset A^2 \ldots \supset A^\sigma \supset A^{\sigma+1} \supset \ldots \supset A^\tau = 0.$$

Для всякого $\sigma < \tau$ возьмем факторгруппу $A_\sigma = A^\sigma / A^{\sigma+1}$, которую мы назвали σ-м ульмовским фактором группы A. Тогда вполне упорядоченная последовательность

$$A_0, A_1, \ldots, A_\sigma, \ldots \quad (\sigma < \tau)$$

будет называться *последовательностью Ульма* группы A. Ясно, что это инвариант группы A.

Очевидно, для редуцированной группы A условие $u(A) = 1$ эквивалентно хаусдорфовости в Z-адической топологии. В примере из § 35 группа имеет ульмовскую длину 2. Ниже мы увидим, что любое порядковое число является ульмовской длиной некоторой группы.

Иногда бывает полезно иметь в распоряжении следующие обозначения. Для порядкового числа σ определим подгруппу $p^\sigma A$ так: $p^0 A = A$,

$$p^{\sigma+1} A = p(p^\sigma A)$$

и $p^\sigma A = \bigcap_{\rho<\sigma} p^\rho A$, если σ — предельное порядковое число. Наименьшее порядковое число τ, для которого $p^{\tau+1} A = p^\tau A$, называется *p-длиной* группы A; очевидно, $p^\tau A$ — максимальная p-делимая подгруппа группы A.

Заметим, что для любого порядкового числа σ имеет место равенство

$$A^\sigma = \bigcap_p p^{\omega\sigma} A.$$

В связи с рассмотрением подгрупп $p^\sigma A$ мы введем понятие *обобщенной p-высоты* $h_p^*(a)$ элемента $a \in A$. Если дан элемент $a \notin p^\tau A$, то существует единственное порядковое число σ, для которого

$a \in p^\sigma A \setminus p^{\sigma+1}A$; мы полагаем

$$h_p^*(a) = \sigma.$$

Если $a \in p^\tau A$, то мы считаем $h_p^*(a) = \tau$. Очевидно, это более тонкое понятие, чем понятие p-высоты $h_p(a)$, введенное в гл. 1. Именно, $h_p^*(a) = h_p(a)$, если p-высота $h_p(a)$ конечна, но $h_p^*(a)$ позволяет делать различие и между элементами бесконечной высоты. Легко проверить, что для любых a, $b \in A$

1) $h_p^*(pa) \geqslant h_p^*(a) + 1$;

2) $h_p^*(a+b) \geqslant \min(h_p^*(a),\ h_p^*(b))$;

3) если $h_p^*(a) \neq h_p^*(b)$, то в п. 2) имеет место равенство;

4) если $A = A' \oplus A''$ и $a \in A'$, $b \in A''$, то также в пункте 2) имеет место равенство;

5) h_p^* не убывает при гомоморфизме.

Очень большое значение имеют инварианты Ульма — Капланского группы A. Если p — фиксированное простое число, то *σ-м инвариантом Ульма — Капланского* группы A называется кардинальное число

$$f_\sigma(A) = r((p^\sigma A)[p]/(p^{\sigma+1}A)[p])$$

[для упрощения обозначений мы пропускаем значок p]. При $\sigma < \omega$ эти инварианты характеризуют базисную подгруппу группы A, если A есть p-группа [см. упр. 9].

Обратимся к ульмовской последовательности. Прежде всего докажем лемму.

Лемма 37.1. *Пусть α: $A \to B$ — эпиморфизм, для которого $\operatorname{Ker}\alpha$ содержит только элементы обобщенной p-высоты $\geqslant \sigma$. Тогда*

$$h_p^*(\alpha a) = h_p^*(a),$$

если $h_p^*(a) < \sigma$.

В силу свойства 5) в случае, когда $h_p^*(a) < \sigma$, нужно проверить только выполнение неравенства $h_p^*(\alpha a) \leqslant h_p^*(a)$. Предположим сначала, что $h_p^*(\alpha a) < \sigma$ и что требуемое неравенство справедливо для любого элемента a' с меньшей обобщенной p-высотой $h_p^*(\alpha a')$ [заметим, что если $h_p^*(\alpha a) = 0$, то в силу свойства 5) доказывать нечего]. Если $h_p^*(\alpha a) = \rho + 1$, то существует такой элемент $a' \in A$, что $h_p^*(\alpha a') = \rho$ и $\alpha a = p\alpha a'$. Отсюда $a = pa' + x$, где $x \in \operatorname{Ker}\alpha$. Из свойств 1) и 2) имеем $h_p^*(a) \geqslant \min(h_p^*(a') + 1,\ \sigma)$ и, таким образом, в силу индуктивного предположения $h_p^*(a) \geqslant \rho + 1 = h_p^*(\alpha a)$. Если $h_p^*(\alpha a) = \rho$ — предельное порядковое число, то для всякого $\rho' < \rho$ и любого целого числа $n > 0$ существует такое $a' \in A$, что $h_p^*(\alpha a') \geqslant \rho'$ и $\alpha a = p^n \alpha a'$. Как и выше, получаем $h_p^*(a) \geqslant \rho' + n$, откуда $h_p^*(a) \geqslant \rho = h_p^*(\alpha a)$. Аналогично можно показать, что предположение $h_p^*(\alpha a) \geqslant \sigma$ дает $h_p^*(a) \geqslant \sigma$, что противоречит условию. ∎

Эта лемма имеет то важное следствие, что *в ульмовском факторе A_σ каждый ненулевой элемент имеет конечную p-высоту хотя бы для*

одного простого числа p. В самом деле, по лемме 37.1 каждый элемент из A^σ, не лежащий в $A^{\sigma+1}$, при естественном эпиморфизме $A^\sigma \to A^\sigma/A^{\sigma+1} = A_\sigma$ отображается на элемент той же p-высоты для каждого простого числа p.

Лемма 37.2. *Если p-компонента группы A_σ при некотором σ ограничена, то $A^{\sigma+1}$ есть p-делимая группа.*

Пусть p^n — верхняя граница порядков элементов p-компоненты группы A_σ. Тогда любое уравнение $px = a \in A^{\sigma+1}$ имеет в группе $A^{\sigma+1}$ решение, так как по определению группы $A^{\sigma+1}$ уравнение $p^{n+1}y = a$ имеет решение в A^σ и $p^n y = x \in A^{\sigma+1}$. ∎

Лемма 37.3. *Все ульмовские факторы A_σ группы A, за исключением, быть может, последнего, если он существует, имеют хотя бы одну неограниченную p-компоненту.*

Если все p-компоненты фактора A_σ ограничены, то по лемме 37.2 группа $A^{\sigma+1}$ делима, откуда A_σ — последний ульмовский фактор. ∎

Лемма 37.4. *Для любого порядкового числа σ последовательность $A_\sigma, A_{\sigma+1}, \ldots$ является последовательностью Ульма группы A^σ, а последовательность $A_0, A_1, \ldots, A_\rho, \ldots$ $(\rho < \sigma)$ — последовательностью Ульма группы A/A^σ.*

Первое утверждение очевидно. Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что естественное отображение η: $A \to A/A^\sigma = C$ сохраняет в силу леммы 37.1 обобщенные p-высоты, если они меньше $\omega\sigma$. Отсюда следует, что A^ρ для любого $\rho \leqslant \sigma$ является полным прообразом подгруппы C^ρ и, таким образом,

$$A_\rho = A^\rho/A^{\rho+1} \cong (A^\rho/A^\sigma)/(A^{\rho+1}/A^\sigma) \cong C^\rho/C^{\rho+1} = C_\rho$$

при $\rho < \sigma$. ∎

Лемма 37.5. *Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — прямая сумма. Тогда для ульмовских факторов A_σ группы A имеет место разложение $A_\sigma = \bigoplus_{i \in I} A_{i\sigma}$, где $A_{i\sigma}$ есть σ-й ульмовский фактор группы A_i, если $\sigma < u(A_i)$, и $A_{i\sigma} = 0$ в противном случае. То же верно для прямого произведения.*

Из свойства 4) легко вывести, что для σ-х ульмовских подгрупп имеет место $A^\sigma = \bigoplus A_i^\sigma$, откуда сразу следует нужное утверждение. ∎

Основным результатом, касающимся последовательности Ульма, является следующая теорема [доказанная для p-групп Л. Я. Куликовым [3] и Фуксом [2]].

Теорема 37.6. *Пусть A — редуцированная группа и $A_0, A_1, \ldots, A_\sigma, \ldots$ $(\sigma < \tau)$ — последовательность Ульма группы*

A. Обозначим через $A_{\sigma, p}$ и $B_{\sigma, p}$ соответственно p-компоненту и p-базисную подгруппу группы A_σ. Тогда

а) *первая ульмовская подгруппа группы A_σ равна нулю для любого $\sigma < \tau$;*

б) $\sum\limits_{0\leqslant\sigma<\tau} |A_\sigma| \leqslant |A| \leqslant \prod\limits_{0\leqslant n<\min(\omega,\tau)} |A_n|$;

в) $\sum\limits_{\rho\leqslant\sigma<\tau} |A_\sigma| \leqslant |A_\rho|^{\aleph_0}$ *для любого* $0\leqslant\rho<\tau$;

г) $r(B_{\sigma+1, p}) \leqslant \operatorname{fin} r(A_{\sigma, p})$ *для любого* $\sigma+1<\tau$ *и любого простого числа p;*

д) $\sum\limits_{\rho<\sigma<\tau} |B_{\sigma, \rho}| \leqslant |B_{\rho, p} \cap A_{\rho, p}|^{\aleph_0}$ *для любого* $0\leqslant\rho<\tau$ *и любого простого числа p.*

Утверждение а) очевидно по определению группы A_σ. В б) первое неравенство следует из того, что $A = \bigcup\limits_{\sigma<\tau} (A^\sigma \setminus A^{\sigma+1})$ и $|A_\sigma| = |A^\sigma/A^{\sigma+1}| \leqslant |A^\sigma \setminus A^{\sigma+1}|$. Для доказательства второго неравенства предположим сначала, что $\tau = n$ — натуральное число. Тогда

$$|A| = |A/A^1|\,|A^1/A^2| \ldots |A^{n-1}/A^n| = |A_0|\,|A_1| \ldots |A_{n-1}|.$$

Если $\tau \geqslant \omega$, то, полагая $\min\limits_{n<\omega} |A_n| = |A_m|$, получаем

$$|A| = |A/A^m|\,|A^m| = |A_0|\,|A_1| \ldots |A_{m-1}|\,|A^m|.$$

Применяя следствие 34.5 к группе A^m, нулевым ульмовским фактором которой является группа A_m, получаем

$$|A^m| \leqslant |A_m|^{\aleph_0} \leqslant |A_m|\,|A_{m+1}| \ldots,$$

откуда следует вторая часть утверждения б).

Неравенство в) получается сразу, так как для группы A^ρ в силу б) и следствия 34.5 справедливо

$$\sum_{\rho\leqslant\sigma<\tau} |A_\sigma| \leqslant |A^\rho| \leqslant |A_\rho|^{\aleph_0}.$$

Для доказательства пункта г) запишем $B_{\sigma+1, p} = \bigoplus\limits_{i\in I} \langle a_i \rangle$. В силу леммы 37.4 группа $A_{\sigma+1}$ является первой ульмовской подгруппой группы $A^\sigma/A^{\sigma+2}$. Поэтому для каждого $n>0$ уравнение $p^n x = a_i$ имеет решение x_i в $A^\sigma/A^{\sigma+2}$. Докажем, что для различных индексов $i_1, \ldots, i_k$ элементы $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ независимы по модулю $A^{\sigma+1}$. В самом деле, иначе $m_1 x_{i_1} + \ldots + m_k x_{i_k} = c \in A_{\sigma+1} = A^{\sigma+1}/A^{\sigma+2}$, где без ограничения общности можно предполагать, что $m_j = p^{n-1} m_j'$, $(m_j', p) = 1$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда $pc = m_1' a_{i_1} + \ldots + m_k' a_{i_k} \in B_{\sigma+1, p}$, что противоречит p-сервантности подгруппы $B_{\sigma+1, p}$ в группе $A_{\sigma+1}$. Отсюда получается, что группа $A_{\sigma, p}$ содержит независимую систему элементов порядка p^n не меньшей мощности, чем ранг группы $B_{\sigma+1, p}$. Это сразу дает г).

Докажем утверждение п. д). Из п. Е) § 34 вытекает, что подгруппа $B_{\sigma, p}$ изоморфна p-базисной подгруппе группы A^{σ}. Так как эта последняя p-сервантна в A^{σ}, то ее элементы содержатся в $p^{\omega\sigma}A\,(\supseteq A^{\sigma})$, но не в $p^{\omega(\sigma+1)}A$. Поэтому она пересекается с $p^{\omega(\sigma+1)}A$ по нулю и для любого σ выполняется неравенство

$$|B_{\sigma, p}| \leqslant |p^{\omega\sigma}A/p^{\omega(\sigma+1)}A|.$$

Отсюда

$$\sum_{\rho<\sigma<\tau} |B_{\sigma, p}| \leqslant \sum_{\rho<\sigma<\tau} |p^{\omega\sigma}A/p^{\omega(\sigma+1)}A| \leqslant |p^{\omega(\rho+1)}A/p^{\omega\tau}A|,$$

где последнее неравенство — частный случай первой части б). Если сформулировать теорему 34.3 для групп, не содержащих ненулевых p-делимых подгрупп, то получится, что

$$|p^{\omega(\rho+1)}A/p^{\omega\tau}A| \leqslant |B_{\rho+1, p}|^{\aleph_0}.$$

Теперь п. г) дает $|B_{\rho+1, p}| \leqslant |A_{\rho, p}|$, откуда в силу следствия 34.4

$$|B_{\rho+1, p}| \leqslant |B_{\rho, p} \cap A_{\rho, p}|^{\aleph_0}. \ \blacksquare$$

Упражнения

1. Если C — подгруппа редуцированной группы A, то $C^{\sigma} \subseteq A^{\sigma}$ для любого порядкового числа σ и $u(C) \leqslant u(A)$. Кроме того, $p^{\sigma}C \subseteq p^{\sigma}A$ для любого σ.

2. Факторгруппа группы A может иметь ульмовскую длину, большую ульмовской длины группы A, даже если она взята по сервантной подгруппе.

3. Если A — такая группа, как в лемме 37.5, то $u(A)$ — это наименьшее порядковое число τ, для которого $u(A_i) \leqslant \tau$ при каждом i.

4. Пусть C — подгруппа группы A^{σ}, причем A и A/C — редуцированные группы и A/C имеет ульмовскую длину $\leqslant\sigma$. Тогда $C = A^{\sigma}$.

5. Если C — такая подгруппа группы A, что $C/(A^{\sigma} \cap C)$ — делимая группа, то $C \subseteq A^{\sigma}$.

6. Определить инварианты Ульма — Капланского для группы из примера § 35.

7. Пусть A есть p-группа, A^{σ} — ее σ-я ульмовская подгруппа. Показать, что существует такой эпиморфизм $A \twoheadrightarrow C$, что $C_{\rho} \cong A_{\rho}$ при $\rho < \sigma$, а группа C_{σ} изоморфна базисной подгруппе группы A^{σ}. [*Указание*: объединить теорему 36.1 и лемму 37.1.]

8. Если $A = \bigoplus_i A_i$, то для инвариантов Ульма — Капланского справедливо равенство

$$f_{\sigma}(A) = \sum_i f_{\sigma}(A_i).$$

9. Если A есть p-группа и $f_n(A) = \mathfrak{m}_n$ $(n < \omega)$, то для любой базисной подгруппы B группы A выполнено

$$B \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{\mathfrak{m}_n} Z(p^{n+1}).$$

[*Указание*: § 34, упр. 2 (д).]

10. Если A есть p-группа, то ее инварианты Ульма — Капланского вполне определяют базисные подгруппы ульмовских подгрупп и ульмовских факторов группы A.

11*. Показать, что для любой группы G существует группа A, первая ульмовская подгруппа которой изоморфна группе G. [*Указание*: если группа G циклическая и равна $\langle a_0 \rangle$, применить такое же построение, как в примере § 35, чтобы превратить a_0 в элемент бесконечной p-высоты: перейти к прямым суммам циклических групп; в случае произвольной группы G использовать p-базис группы G для каждого p.]

Замечания

В гл. VI существенно используется материал двух работ: статьи Л. Я. Куликова [2], где впервые были введены базисные подгруппы p-групп и было доказано много различных фактов о них, и статьи автора (Фукс [9]), который установил, что определенный способ введения базисных подгрупп годится в общем случае, если зафиксировано простое число p, и что возникающие так p-базисные подгруппы все еще обладают большинством хороших свойств базисных подгрупп p-групп. Основное различие состоит в том, что прекрасная теорема Селе [т. е. теорема 36.1] перестает быть верной в общем случае. Куликов [3] рассматривал также базисные подмодули модулей над двумя кольцами: кольцом целых p-адических чисел и кольцом рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с p. До сих пор в общем случае p-базисные подмодули не исследовались.

Ульмовские подгруппы и последовательности были введены Ульмом [1] для p-групп. Их значение для теории p-групп нельзя переоценить [см. гл. XII]. Для произвольных абелевых групп эти понятия не получали полного признания до тех пор, пока не оказалось, что ульмовские факторы копериодических групп алгебраически компактны [см. теорему 54.3]. Построение групп с заданными последовательностями Ульма будет рассмотрено во втором томе.

Проблема 21. Когда подгруппа группы A а) содержится в p-базисной подгруппе группы A? б) не пересекается с некоторой p-базисной подгруппой?

В примарном случае ответ на вопрос а) дает теорема 33.4.

Проблема 22. Найти условия, которые нужно наложить на сервантную подгруппу, чтобы она была эндоморфным образом группы.

Для p-групп достаточным условием является представимость подгруппы в виде прямой суммы счетных групп [это вытекает из следствия 36.2].

Глава VII

АЛГЕБРАИЧЕСКИ КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ

В гл. IV мы видели, что группа служит прямым слагаемым для любой содержащей ее группы тогда и только тогда, когда она делима. Эта глава посвящена изучению групп, служащих прямыми слагаемыми для любых групп, содержащих их в качестве сервантных подгрупп.

Эти группы, известные под названием алгебраически компактных групп, обладают многими замечательными свойствами, являющимися для них характеристическими. Не все эти свойства носят теоретико-групповой характер; природа некоторых из них является топологической или гомологической. Оказывается, что алгебраически компактные группы тождественны сервантно инъективным группам, введенным в § 30. Центральное место в этой главе займет структурная теорема, дающая для алгебраически компактных групп полную и независимую систему инвариантов, состоящую из кардинальных чисел. Читатель сможет заметить, что во многих отношениях теория алгебраически компактных групп параллельна теории делимых групп—факт, впервые отмеченный Марандой [1].

В дальнейших главах мы часто будем встречаться с алгебраически компактными группами.

§ 38. Алгебраическая компактность

Группа A называется *алгебраически компактной*, если она выделяется прямым слагаемым из всякой группы G, содержащей ее в качестве сервантной подгруппы. По теореме 21.2 все делимые группы алгебраически компактны, а по теореме 27.5 алгебраически компактны все ограниченные группы. В частности, коциклические группы алгебраически компактны.

Непосредственно получается, что прямое слагаемое алгебраически компактной группы снова алгебраически компактно и что группа алгебраически компактна тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть алгебраически компактна.

Удобно начать с результата, дающего различные характеризации алгебраически компактных групп. Эквивалентность утверждений а) и в) из теоремы 38.1 уже была отмечена в теореме 30.4.

Теорема 38.1. *Следующие условия для группы A эквивалентны:*

а) *группа A сервантно инъективна;*

б) *группа A алгебраически компактна;*

в) *группа A — прямое слагаемое прямого произведения коциклических групп;*

г) *группа A в алгебраическом смысле является прямым слагаемым группы, допускающей компактную топологию;*

д) *если всякая конечная подсистема системы уравнений над A имеет решение в группе A, то и вся система уравнений разрешима в A.*

Доказательство будем вести по циклу. Предположим сначала, что выполнено условие а), и пусть A — сервантная подгруппа группы G. Из наличия сервантно точной последовательности $0 \to A \to G \to G/A \to 0$ и из условия а) мы получаем, что тождественное отображение 1_A: $A \to A$ можно продолжить до гомоморфизма $G \to A$. Следовательно, A — прямое слагаемое группы G, что доказывает б).

Предположим теперь, что выполнено условие б). По лемме 30.3 группу A можно вложить в качестве сервантной подгруппы в прямое произведение коциклических групп. Следовательно, из п. б) вытекает в).

Предположим, что выполнено в). Так как прямое произведение компактных групп само компактно в топологии произведения и так как свойство быть прямым слагаемым транзитивно, то свойство г) будет доказано, если мы покажем, что им обладают коциклические группы. Но это очевидно, так как группа $Z(p^k)$ ($k < \infty$) компактна в дискретной топологии, а группа $Z(p^\infty)$ — прямое слагаемое группы действительных чисел, взятых по модулю 1 [которая является, как хорошо известно, компактной группой].

Чтобы вывести д) из г), возьмем систему уравнений

$$\sum_{j \in J} n_{ij} x_j = a_i \quad (a_i \in A,\ i \in I), \tag{1}$$

где n_{ij} — целые числа, которые при фиксированном i почти все равны нулю, и предположим, что всякая ее конечная подсистема имеет в группе A решение. По условию г) существует такая группа B, что группа $A \oplus B = C$ допускает компактную топологию. Систему уравнений (1) мы можем рассматривать как систему уравнений над группой C. Решение i-го уравнения системы (1) можно рассматривать как элемент $(\ldots, c_j, \ldots)$ группы $C^J = \bar{C}$, где элементы $x_j = c_j$ ($j \in J$) удовлетворяют i-му уравнению. Таким образом, множество всех решений i-го уравнения является подмножеством X_i компактного пространства $\bar{C}$. Кроме того, подмножество X_i замкнуто, так как оно определяется уравнением. Предположение, что всякая конечная подсистема системы (1) разрешима, дает то, что всякое конечное подмножество множества всех X_i имеет непустое пересечение. В силу компактности пространства $\bar{C}$ пересечение $\bigcap X_i$ всех подмножеств X_i не пусто, поэтому всякая система уравнений (1) допускает решение в C. Компоненты этого решения в прямом слагаемом A группы C дают решение в группе A.

Наконец, предположим, что выполнено условие д). Пусть $0 \to B \to C \to C/B \to 0$ — сервантно точная последовательность и η: $B \to A$ — гомоморфизм. Пусть c_j ($j \in J$) — система образующих группы C по модулю B и

$$\sum_{j \in J} n_{ij} c_j = b_i \in B \quad (i \in I)$$

— все соотношения между элементами c_j и элементами группы B. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j \in J} n_{ij} x_j = \eta b_i \,(\in A) \quad (i \in I). \tag{2}$$

Конечная подсистема системы (2) содержит явно лишь конечное число неизвестных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$. В силу сервантности подгруппа B выделяется прямым слагаемым из подгруппы $B' = \langle B, c_{j_1}, \ldots, c_{j_k} \rangle$, т. е. $B' = B \oplus C'$ [см. теорему 28.4], и образы компонент в B элементов $c_{j_1}, \ldots, c_{j_k}$ при гомоморфизме η дают решение в группе A. Следовательно, система (2) удовлетворяет предположениям п. д). Мы заключаем, что в группе A существует решение $x_j = a_j$ всей системы (2). Соответствие $c_j \mapsto a_j$ порождает продолжение гомоморфизма η до гомоморфизма $C \to A$. Следовательно, выполнено условие а). ∎

Для редуцированной группы A условие в) может быть усилено.

Следствие 38.2. *Редуцированная алгебраически компактная группа является прямым слагаемым прямого произведения циклических p-групп.*

Если A — редуцированная алгебраически компактная группа, то для некоторой группы B имеем $A \oplus B = C = C_1 \oplus C_2$, где C_1 — прямое произведение циклических групп $Z(p^k)$, а C_2 — прямое произведение квазициклических групп. Очевидно, C_2 является максимальной делимой подгруппой группы C. В силу того, что, следовательно, C_2 — вполне характеристическая подгруппа, $C_2 = (A \cap C_2) \oplus (B \cap C_2)$ [см. лемму 9.3]. Первое слагаемое здесь должно быть нулевым. Поэтому $C_2 \leq B$ и $A \oplus (B/C_2) \cong C_1$. ∎

В частности, для первой ульмовской подгруппы редуцированной алгебраически компактной группы A имеем $A^1 = 0$.

Для удобства ссылок сформулируем следующее простое следствие п. в) и г).

Следствие 38.3. *Прямое произведение групп алгебраически компактно тогда и только тогда, когда каждая компонента алгебраически компактна.* ∎

Объединяя лемму 30.3 с нашей теоремой, получаем

Следствие 38.4. *Всякую группу можно вложить в качестве сервантной подгруппы в алгебраически компактную группу.* ∎

Усиление этого результата см. в теореме 41.7.

Нам понадобится следующая более слабая форма определения алгебраически компактных групп.

Предложение 38.5 (Сонсяда). *Группа A алгебраически компактна тогда и только тогда, когда A служит прямым слагаемым для вся-*

кой такой группы G, что A — сервантная подгруппа группы G, а факторгруппа G/A изоморфна группе Q или некоторой группе $Z(p^\infty)$.

Нужно проверить только достаточность условия. Предположим, что группа A обладает указанным свойством. Тогда группа A должна выделяться прямым слагаемым из всякой группы G, где она — сервантная подгруппа и G/A — делимая группа. В самом деле, это вытекает из наших предположений, леммы 9.4 и теоремы 23.1. Рассмотрим, далее, случай, когда A — сервантная подгруппа группы G и G/A — периодическая группа. Если B/A — базисная подгруппа группы G/A, то из теоремы 28.2 имеем $B = A \oplus B'$ для некоторой подгруппы $B' \subseteq B$. Теперь $G/B \cong (G/A)/(B/A)$ — делимая группа, поэтому G/B' содержит $B/B' \cong A$ в качестве сервантной подгруппы [подгруппа B сервантна в G], факторгруппа по которой делима. Следовательно, $G/B' = B/B' \oplus G'/B'$ для некоторой подгруппы $G' \subseteq G$. Так как $G = B + G' = A + B' + G' = A + G'$ и $A \cap G' = (A \cap B) \cap G' = A \cap (B \cap G') = A \cap B' = 0$, то $G = A \oplus G'$.

Если G/A — группа без кручения, то по предложению 24.6 существует такая группа H, что $G \subseteq H$ и H/A — делимая группа без кручения. По первой части настоящего доказательства группа A служит прямым слагаемым для группы H, а тогда и для группы G. Наконец, если G/A — произвольная группа и T/A — ее периодическая часть, то A служит прямым слагаемым для группы T, т. е. $T = A \oplus T'$, а так как $T/T' \cong A$ — прямое слагаемое группы G/T', то $G = A \oplus G'$ для некоторой подгруппы $G' \subseteq G$. ∎

Упражнения

1. Доказать, что группа Z не алгебраически компактна. Вообще, свободные группы не алгебраически компактны, за исключением нулевой группы.

2. Прямое произведение групп, изоморфных группе целых p-адических чисел, является алгебраически компактной группой.

3. Если A — алгебраически компактная группа и B — сервантная подгруппа группы A, то A/B — алгебраически компактная группа. [*Указание*: использовать предложение 24.6 и лемму 26.1.]

4. Доказать, что группа A алгебраически компактна, если она инъективна относительно класса сервантно точных последовательностей $0 \to B \to C \to D \to 0$, где D — счетная группа. [*Указание*: использовать теорему 38.1 и предложение 38.5.]

5. Группа A алгебраически компактна, если она удовлетворяет условию д) из теоремы 38.1 для систем уравнений со счетным числом неизвестных.

6. Группу можно вложить в качестве сервантной подгруппы в редуцированную алгебраически компактную группу тогда и только тогда, когда ее первая ульмовская подгруппа нулевая.

7. Если A — алгебраически компактная группа, то ее первая ульмовская подгруппа совпадает с ее максимальной делимой подгруппой.

8. Всякая группа изоморфна сервантной подгруппе группы, допускающей компактную топологию.

9. Группа A не обязана быть алгебраически компактной, когда ее подгруппа C и факторгруппа A/C алгебраически компактны. [*Указание*: вложить нулевой ульмовский фактор группы примера из § 35 в редуцированную алгебраически компактную группу (упр. 6), применить предложение 24.6 и упр. 7; ср. с копериодическими группами.]

10. Всякая линейно компактная группа алгебраически компактна. [*Указание*: проверить, что выполнено условие д), как в доказательстве теоремы 38.1; решения i-го уравнения образуют смежный класс по замкнутой подгруппе; см. § 13, упр. 6.]

[§ 39. Полные группы

В этом параграфе мы более детально рассмотрим группы, *полные* в их Z-адической или p-адической топологии. Это не новый класс групп; именно, мы увидим, что редуцированные алгебраически компактные группы и только они полны в их Z-адической топологии.

Все группы, дискретные в их Z-адической топологии [т. е. ограниченные группы], очевидно, являются полными. Дальнейшие примеры полных групп получатся, как подсказывает следствие 13.4, если брать прямые слагаемые прямых произведений полных групп.

Основным результатом, касающимся полных групп, является следующая теорема, в основном полученная Капланским [2].

Теорема 39.1. *Группа полна в Z-адической топологии тогда и только тогда, когда она — редуцированная алгебраически компактная группа.*

Предположим сначала, что A — редуцированная алгебраически компактная группа. Из следствия 38.2 мы знаем, что она служит прямым слагаемым для прямого произведения циклических групп $Z(p^k)$. Так как каждая группа $Z(p^k)$ полна в своей Z-адической топологии, то повторное применение следствия 13.4 показывает, что группа A полна в своей Z-адической топологии.

Предположим теперь, что группа A полна в своей Z-адической топологии. Тогда группа A хаусдорфова и, следовательно, редуцированная. Пусть группа G содержит группу A в качестве сервантной подгруппы, причем G/A — делимая группа. Для завершения доказательства нам нужно только показать, что A служит для G прямым слагаемым [см. предложение 38.5]. Если группа G хаусдорфова в своей Z-адической топологии, то в силу плотности подгруппы A в G каждый элемент $g \in G$ является пределом некоторой последовательности элементов из A. Так как относительная топология в A совпадает с Z-адической топологией группы A, то эта последовательность является

последовательностью Коши в группе A, откуда $g \in A$ и $A = G$. Если группа G не хаусдорфова, то группа G/G^1 хаусдорфова и содержит $(A + G^1)/G^1 \cong A$ в качестве сервантной подгруппы [заметим, что $A \cap G^1 = 0$]. Из того, что уже было показано, вытекает, что $A + G^1 = G$, т. е. $G = A \oplus G^1$. ∎

Замечание. Часть теоремы 39.1, касающуюся необходимости, можно немного усилить, заметив, что *группа A полна в Z-адической топологии, если она полна в некоторой [хаусдорфовой] топологии, более грубой, чем Z-адическая топология*. В самом деле, пусть $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — последовательность Коши в Z-адической топологии, где, как можно предполагать, для любого n имеет место равенство $a_n - a_{n+1} = n!\, g_n$ [при некотором $g_n \in A$]. Положим

$$b_{nk} = g_n + (n+1)\, g_{n+1} + \ldots + (n+1) \ldots (n+k)\, g_{n+k}.$$

Тогда последовательность $b_{n0}, \ldots, b_{nk}, \ldots$ будет снова последовательностью Коши в Z-адической топологии, так как $k! \mid (n+1) \ldots (n+k)$, и мы будем иметь $a_n = n! b_{nk} + a_{n+k+1}$ для любых n и k. Всякая последовательность Коши в Z-адической топологии является последовательностью Коши в более грубой топологии, поэтому при $k \to \infty$ получим $a_n = n!\, b_n + a$, где a и b_n — пределы соответственно последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_{nk}\}$. Следовательно, $a - a_n \in n!A$ и элемент a служит пределом последовательности $\{a_n\}$ также в Z-адической топологии.

Так как Z-адическая топология группы A индуцирует топологию на подгруппе B, более грубую, чем Z-адическая топология группы B, то из теоремы 39.1, нашего замечания, предложения 13.1 и предложения 13.2 получаем

Следствие 39.2. *Если A — редуцированная алгебраически компактная группа и B — такая ее подгруппа, что $(A/B)^1 = 0$, то B и A/B — редуцированные алгебраически компактные группы.* ∎

Следующий факт заслуживает особого упоминания.

Следствие 39.3. *Если θ — эндоморфизм полной группы A, то* $\operatorname{Ker} \theta$ *и* $\operatorname{Im} \theta$ *— полные группы.*

Положим $B = \operatorname{Ker}\theta$, применим теорему 39.2 и заметим, что $A/\operatorname{Ker} \theta$ — полная группа в силу предложения 13.2. ∎

Особый интерес представляет следующий результат.

Предложение 39.4. *Обратный предел редуцированных алгебраически компактных групп является редуцированной алгебраически компактной группой. В частности, J_p — алгебраически компактная группа.*

В силу п. д) § 12 обратный предел является замкнутой подгруппой прямого произведения в топологии произведения и, следовательно, в блочной топологии. В силу предположений и следствия 38.3 прямое

произведение является редуцированной алгебраически компактной группой. Остается применить следствие 39.2. ∎

Рассмотрим теперь вопрос о вложении группы A в ее Z-адическое пополнение $\hat{A}$. Как мы видели в § 13, это может быть осуществлено или с помощью последовательностей Коши, или с помощью обратных пределов.

Теорема 39.5. *Для любой группы A группа*

$$\hat{A} = \varprojlim_n A/nA$$

является полной. Каноническое отображение μ: $a \mapsto (\ldots, a + nA, \ldots) \in \hat{A}$ *имеет ядро* A^1, μA — *сервантная подгруппа группы* $\hat{A}$ *и* $\hat{A}/\mu A$ — *делимая группа.*

Так как группы A/nA ограниченные и, следовательно, алгебраически компактные, то первая часть теоремы вытекает из предложения 39.4. Очевидно, $\mu a = 0$ дает $a \in nA$ для любого n, откуда $\operatorname{Ker} \mu = A^1$. Если для элемента $\hat{a} = (\ldots, a_n + nA, \ldots)$ ($a_n \in A$) выполнено равенство $m\hat{a} = \mu a$ при некотором $a \in A$, то $ma_n - a \in nA$ для каждого n, в частности для $n = m$, откуда $a \in mA$, что дает сервантность подгруппы μA в группе $\hat{A}$. Чтобы доказать делимость группы $\hat{A}/\mu A$, достаточно показать, что индуцированная топология в группе $\hat{A}$ совпадает с Z-адической топологией, так как тогда из плотности подгруппы μA в группе $\hat{A}$ сразу будет следовать делимость $\hat{A}/\mu A$.

Поскольку группы A/nA ограниченные и, следовательно, дискретные, то окрестностями нуля в группе $\hat{A}$ служат $U_n = \pi_n^{-1}0$, где π_n есть n-я координатная проекция $\hat{A} \to A/nA$. Покажем, что $U_n = n\hat{A}$. Так как включение $n\hat{A} \subseteq U_n$ очевидно, предположим, что $\hat{a} \in U_n$, т. е. $\hat{a} = (\ldots, a_m + mA, \ldots)$, где $a_n = 0$. Для любого m существует такой элемент $c_m \in A$, что $a_{(m+1)!\,n} - a_{m!\,n} = m!nc_m$. Положим $b_1 = 0$ и $b_{m+1} = b_m + m!c_m$ при $m > 1$. Тогда по индукции получится $a_{m!\,n} = nb_m$ для каждого $m \geqslant 1$, и $\hat{b} = (\ldots, b_m + m!A, \ldots) \in \hat{A}$. Для этого элемента $\hat{b}$ выполнено равенство $n\hat{b} = \hat{a}$, откуда $U_n \subseteq n\hat{A}$. ∎

Следствие 39.6. *p-базисная подгруппа группы A для любого простого числа p при каноническом отображении μ изоморфно отображается на p-базисную подгруппу группы $\hat{A}$.*

Так как $\operatorname{Ker} \mu = A^1$, то из п. Е) § 34 следует, что μ дает изоморфное отображение p-базисной подгруппы группы A на p-базисную подгруппу группы μA. Так как $\hat{A}/\mu A$ — делимая группа, а μA — сервантная подгруппа группы $\hat{A}$, то остается применить утверждение Д) § 34. ∎

Важность канонического отображения μ: $A \to \hat{A}$ заключается в том, что оно функторное [что оправдывает его название].

Предложение 39.7. *Гомоморфизм α: $A \to B$ индуцирует единственный гомоморфизм $\hat{\alpha}$: $\hat{A} \to \hat{B}$, для которого диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \mu\downarrow & & \downarrow\nu \\ \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & \hat{B} \end{array} \qquad (1)$$

коммутативна [*вертикальные отображения — канонические*].

Доказательство дано в замечании, сделанном после теоремы 13.8. ∎

Группа $\hat{A}$ [единственная с точностью до непрерывного изоморфизма, см. § 13] называется *Z-адическим пополнением* группы A. В силу предложения 39.7 соответствие $A \mapsto \hat{A}$, $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ является функтором из категории $\mathcal{A}$ в категорию полных групп.

Как показано в теореме 39.5, пополнение группы может быть осуществлено путем использования обратных пределов. Пользуясь этим, мы покажем, что при взятии пополнения сервантно точные последовательности переходят в расщепляющиеся последовательности.

Теорема 39.8. *Пусть $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — сервантно точная последовательность. Тогда последовательность*

$$0 \to \hat{A} \xrightarrow{\hat{\alpha}} \hat{B} \xrightarrow{\hat{\beta}} \hat{C} \to 0 \qquad (2)$$

точна и расщепляется.

Если заданная последовательность сервантно точна, то в силу теоремы 29.1 индуцированные последовательности $0 \to A/nA \to \to B/nB \to C/nC \to 0$ точны для всех n. Из теорем 39.5 и 12.3 следует, что для доказательства точности последовательности (2) достаточно проверить, что $\hat{\beta}$ — эпиморфизм. Здесь $\operatorname{Im} \hat{\beta} \subseteq \hat{C}$, и из следствия 39.2 вытекает полнота группы $\operatorname{Im} \hat{\beta}$. Так как $\operatorname{Im} \hat{\beta}$ содержит образ группы C при каноническом отображении, плотный в группе $\hat{C}$, то обязательно $\operatorname{Im} \hat{\beta} = \hat{C}$. Остается доказать сервантность подгруппы $\operatorname{Im} \hat{\alpha} \cong \hat{A}$ в группе $\hat{B}$. Отображение $a + A^1 \mapsto \alpha a + B^1$ переводит A/A^1 в сервантную подгруппу группы B/B^1. Отсюда и из того, что подгруппа νB сервантна в $\hat{B}$, следует, что $\nu\alpha A$ — сервантная подгруппа группы $\hat{B}$. Так как $\nu\alpha = \hat{\alpha}\mu$ [см. (1)] и $\hat{\alpha}\hat{A}/\hat{\alpha}\mu A$ — делимая группа, то подгруппа $\hat{\alpha}\hat{A}$ сервантна в $\hat{B}$. ∎

В оставшейся части этого параграфа мы займемся прямыми разложениями полных групп. Прежде всего, справедлива

Теорема 39.9. *Предположим, что полная группа A содержится в прямой сумме $\bigoplus_{i \in I} C_i$ таких групп C_i, что $C_i^1 = 0$ для каждого i. Тогда*

существует такое целое число $n > 0$, что подгруппа nA содержится в прямой сумме конечного числа групп C_i.

Если это не так, то существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1, \ldots, n_j, \ldots$, где $n_j \mid n_{j+1}$, и существуют такие группы B_j, каждая из которых есть прямая сумма конечного числа групп C_i, что эти B_j порождают в $\oplus C_i$ подгруппу, являющуюся их прямой суммой, и

$$n_j A \cap \bigoplus_{k=1}^{j-1} B_k \subset n_j A \cap \bigoplus_{k=1}^{j} B_k \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Пусть a_j — элемент, входящий в правую часть, но не лежащий в левой части; тогда элемент a_{j-1} имеет нулевую компоненту в B_j, а элемент a_j — ненулевую. Поэтому последовательность Коши $a_1, \ldots$ $\ldots, a_j, \ldots \in A$ не может иметь предела в $\bigoplus_i C_i$. ∎

Следствие 39.10. *Если $A = \bigoplus_{i \in I} C_i$ — прямое разложение полной группы A, то все C_i — полные группы и существует такое целое число $n > 0$, что $nC_i = 0$ для почти всех $i \in I$.*

Первое утверждение вытекает из следствия 13.4, второе — непосредственно из теоремы 39.9. ∎

Упражнения

1. Пусть $m > 0$ — целое число. Показать, что группа A является полной тогда и только тогда, когда mA — полная группа.

2 (Капланский [2]). Если C — сервантная подгруппа полной группы A, то замыкание подгруппы C в A служит для A прямым слагаемым.

3. Описать Z-адические пополнения следующих групп:

$$Z, \; Q_p, \; Q^{(p)}, \quad \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z(p^n), \quad \bigoplus_p Z(p).$$

4. Z-адическое пополнение прямого произведения является прямым произведением Z-адических пополнений компонент.

5. (а) Показать, что p-адическое пополнение группы A изоморфно $\varprojlim_k A/p^k A$.

(б) Доказать, что p-адическое пополнение всегда является p-адическим модулем.

(в) Если группа A полна в своей p-адической топологии, то $qA = A$ для любого простого числа $q \neq p$.

6. Доказать предложение 39.7 и теорему 39.8 для p-адических пополнений [заменив сервантную точность p-сервантной точностью].

7. Пусть $B = \bigoplus_n B_n$, где $B_n = \oplus\, Z(p^n)$. Показать, что если $B^* = \prod_n B_n$ и C/B — максимальная делимая подгруппа группы B^*/B, то C есть p-адическое пополнение группы B.

8. Если группа A полна в своей p-адической топологии, а B есть p-базисная подгруппа группы A, то всякий гомоморфизм $B \to A$ однозначно продолжается до эндоморфизма группы A.

9. Если B — базисный подмодуль p-адического модуля A, то всякое конечно порожденное прямое слагаемое модуля B служит прямым слагаемым и для A.

10. Доказать, что ни $J = \prod_p J_p$, ни $\prod_p Z(p)$ не является прямой суммой бесконечного числа ненулевых подгрупп.

11. Пусть A_i ($i \in I$) — алгебраически компактные группы. Найти необходимое и достаточное условие, при котором $\bigoplus_i A_i$ — алгебраически компактная группа.

12. Обратный предел нередуцированных алгебраически компактных групп не обязан быть алгебраически компактной группой. [*Указание*: используя идею упр. 6 из § 21, получить в качестве обратного предела неограниченную p-группу.]

13 (Фукс [13]). Обратный предел групп с условием минимальности является алгебраически компактной группой. [*Указание*: § 13, упр. 6, 7, и § 38, упр. 10.]

§ 40. Строение алгебраически компактных групп

Мы рассмотрели ряд важных свойств алгебраически компактных групп и подошли теперь к структурной теореме для этих групп. Так как строение делимых групп может быть описано с помощью инвариантов, являющихся кардинальными числами, то, не теряя общности, можно ограничиться в наших рассуждениях редуцированным случаем.

Дальнейшее упрощение возможно ввиду следующего предложения.

Предложение 40.1 (Капланский [2]). *Редуцированная группа A алгебраически компактна тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$A = \prod_p A_p, \tag{1}$$

где каждая группа A_p полна в своей p-адической топологии [произведение берется по всем различным простым числам p]. Группы A_p однозначно определяются группой A.

Предположим сначала, что группа A алгебраически компактна, и пусть $A \oplus B = C$ — прямое произведение циклических p-групп [см. следствие 38.2]. Соберем слагаемые $Z(p^k)$, относящиеся к одному и тому же простому числу p, и образуем их прямое произведение C_p. Это подгруппа группы C, причем, очевидно, $C = \prod_p C_p$. Подгруппы C_p являются вполне характеристическими в C, поэтому в силу леммы 9.3

имеем $C_p = A_p \oplus B_p$, где $A_p = A \cap C_p$, $B_p = B \cap C_p$. Таким образом, $C = \prod_p A_p \oplus \prod_p B_p$. Очевидно, подгруппы A_p при переменном p порождают в группе A подгруппу A_0, являющуюся их прямой суммой. Если рассматривать группу C как топологическую группу с Z-адической топологией, то ясно, что замыкание в C подгруппы A_0 должно содержать $\prod_p A_p$, так как $\prod_p A_p/A_0$ — делимая группа. Так как $B^1 = 0$, то подгруппа A замкнута в C, откуда получаем включение $\prod_p A_p \subseteq A$. Аналогично получаем, что $\prod_p B_p \subseteq B$. Следовательно, $A = \prod_p A_p$, $B = \prod_p B_p$. Как прямое слагаемое полной группы группа A_p должна быть полной в своей Z-адической топологии, которая здесь совпадает с p-адической топологией, так как Z-адическая и p-адическая топологии на группе $Z(p^k)$ совпадают.

Обратно, пусть A_p — группа, полная в своей p-адической топологии. Тогда группу A_p можно следующим естественным образом превратить в модуль над кольцом Q_p^* целых p-адических чисел. Пусть $a \in A_p$ и $\pi = s_0 + s_1 p + \ldots + s_n p^n + \ldots \in Q_p^*$. Последовательность

$$s_0 a, \ (s_0 + s_1 p)\, a, \ \ldots, \ (s_0 + s_1 p + \ldots + s_n p^n)\, a, \ \ldots$$

является последовательностью Коши в группе A_p, следовательно, она сходится в A_p к пределу, и мы определяем πa как этот предел. Легко проверить, что таким путем группа A_p действительно превращается в унитарный Q_p^*-модуль. Отсюда получается, что $qA_p = A_p$ для всех простых чисел $q \neq p$, т. е. что Z-адическая топология в группе A_p совпадает с p-адической. По теореме 39.1 группа A_p алгебраически компактна, а из следствия 38.3 вытекает, что прямое произведение A групп A_p алгебраически компактно.

Наконец, единственность компонент A_p в разложении (1) сразу следует из соотношения

$$A_p = \bigcap_{q \neq p} q^k A \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где q опять обозначает простые числа. Это — следствие соотношений $qA_p = A_p \ (q \neq p)$ и $\bigcap_k p^k A_p = 0$. ∎

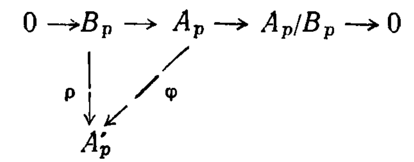
Группа A_p из предыдущей теоремы называется *p-адической компонентой* группы A. Это *p-адическая алгебраически компактная группа* в том смысле, что она полна в своей p-адической топологии. Как показывает предыдущее доказательство, эта группа должна быть p-адическим модулем. Он может быть полностью охарактеризован с помощью базисных подгрупп [см. следующую теорему].

Теорема 40.2. *Существует взаимно однозначное соответствие между p-адическими алгебраически компактными группами A_p и пря-*

мыми суммами B_p циклических p-адических модулей: если дана группа A_p, то мы ставим ей в соответствие ее базисный подмодуль B_p; заданной группе B_p мы ставим в соответствие ее p-адическое пополнение.

Из теоремы 35.5 сразу следует, что соответствие $A_p \mapsto B_p$, где A_p есть p-адический модуль, B_p — его базисный подмодуль, является однозначным [B_p мы теперь рассматриваем как абстрактную группу]. С другой стороны, пополнение $\hat{B}$ прямой суммы B циклических p-адических модулей в p-адической топологии существует и определено однозначно с точностью до изоморфизма. Группа $\hat{B}$ алгебраически компактна [см. теорему 39.1]. Если отождествить группу B с ее образом в $\hat{B}$ при естественном вложении, то достаточно просто сослаться на следствие 39.6, чтобы получить, что B — базисная подгруппа группы $\hat{B}$. Отсюда мы заключаем, что если последовательно выполнить отображение $B_p \mapsto A_p$ и отображение $A_p \mapsto B_p$, то мы получим исходную прямую сумму циклических p-адических модулей.

Нам остается проверить, что две p-адические алгебраически компактные группы A_p и A'_p с изоморфными базисными подмодулями B_p изоморфны. Начнем с диаграммы



где строка сервантно точна и ρ — вложение $B_p \to A'_p$. В силу того, что группа A'_p сервантно инъективна, существует гомоморфизм φ: $A_p \to A'_p$, превращающий эту диаграмму в коммутативную. Аналогично получается гомоморфизм ψ: $A'_p \to A_p$, продолжающий вложение $B_p \to A_p$. Отсюда имеем $\psi\varphi$: $A_p \to A_p$, причем ограничение этого гомоморфизма на B_p является тождественным отображением. Следовательно, по предложению 34.1 $\psi\varphi = 1_{A_p}$. Аналогично $\varphi\psi$ является тождественным отображением группы A'_p на себя, откуда $A_p \cong A'_p$. ∎

Ввиду приведенной выше теоремы p-адические алгебраически компактные группы A_p могут быть охарактеризованы теми же системами инвариантов, что и их базисные подмодули B_p, а именно мощностями $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) множеств компонент в прямом разложении модуля B_p, изоморфных соответственно J_p и $Z(p^k)$. Эта счетная система кардинальных чисел является полной независимой системой инвариантов группы A_p, зная которую, мы можем восстановить группу A_p, взяв сначала соответствующую прямую сумму и затем p-адическое пополнение:

группа A_p изоморфна p-адическому пополнению группы

$$\bigoplus_{\mathfrak{m}_0} J_p \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \bigoplus_{\mathfrak{m}_k} Z(p^k).$$

Если A — произвольная алгебраически компактная группа, то инварианты ее максимальной делимой подгруппы вместе с инвариантами ее p-адических компонент A_p образуют полную независимую систему инвариантов группы A. Поэтому мы вправе утверждать, что строение алгебраически компактных групп известно.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число. Тогда группа $J_p^{\mathfrak{m}}$ изоморфна p-адическому пополнению группы $\bigoplus_{2^{\mathfrak{m}}} J_p$. Действительно, это p-адическая алгебраически компактная группа без кручения, базисный подмодуль которой имеет тот же ранг, что и $J_p^{\mathfrak{m}}/pJ_p^{\mathfrak{m}} \cong Z(p)^{\mathfrak{m}}$.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{m}_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) — какие-то кардинальные числа. Тогда группа $\prod_{k=1}^{\infty} [\bigoplus_{\mathfrak{m}_k} Z(p^k)]$ изоморфна p-адическому пополнению группы

$$\bigoplus_{\mathfrak{m}} J_p \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \bigoplus_{\mathfrak{m}_k} Z(p^k),$$

где $\mathfrak{m} = \prod \mathfrak{m}_k$. В самом деле, группа A, о которой идет речь, является p-адической алгебраически компактной группой, базисный подмодуль которой по следствию 33.3 имеет указанную периодическую часть. Очевидно, $A/pA \cong \prod_k \bigoplus_{\mathfrak{m}_k} Z(p)$, причем элементам периодической части группы A в этом прямом произведении соответствуют элементы из прямой суммы. Из доказательства теоремы 35.2 получается, что $\mathfrak{m} = \prod \mathfrak{m}_k$.

Из предыдущей теоремы мы теперь можем вывести следующие простые, но важные следствия.

Следствие 40.3. *Если редуцированная алгебраически компактная группа является периодической, то она ограниченная.*

В разложение (1) такой группы A может входить лишь конечное число групп $A_p \neq 0$. По теореме 40.2 каждая группа A_p является p-адическим пополнением прямой суммы B_p циклических p-групп. Легко проверить, что это пополнение всегда содержит элементы бесконечного порядка, кроме случая, когда B_p — ограниченные группы и, таким образом, $B_p = A_p$. ∎

Следствие 40.4 (Капланский [2]). *Всякая ненулевая редуцированная алгебраически компактная группа обладает прямым слагаемым, изоморфным группе J_p или $Z(p^k)$ ($k = 1, 2, \ldots$) при некотором p.*

Если группа $A \neq 0$ алгебраически компактная и редуцированная и p — такое простое число, что $A_p \neq 0$ [см. предложение 40.1], то базисный подмодуль B_p группы A_p отличен от нуля и, следовательно, имеет прямое слагаемое указанного типа. Это прямое слагаемое сервантно в A и алгебраически компактно, поэтому оно служит прямым слагаемым и для группы A. ∎

Отсюда получается, что неразложимыми алгебраически компактными группами являются J_p, Q и подгруппы групп $Z(p^\infty)$[что группа J_p неразложима, будет также показано в гл. XIII].

Упражнения

1. Всякая редуцированная алгебраически компактная группа является унитарным модулем над кольцом $\prod_p Q_p^*$.

2. Если для каждого простого числа p группа A_p полна в своей p-адической топологии, то в группе $A = \prod_p A_p$ топология произведения и блочная топология совпадают.

3. (a) Счетная алгебраически компактная группа является прямой суммой делимой группы и ограниченной группы.

(б) Не существует счетных редуцированных алгебраически компактных групп без кручения.

4. Определить инварианты следующей алгебраически компактной группы:

$$[\prod_{k=1}^{\infty} Z(p^k)]^{\mathfrak{m}} \oplus J_p^{\mathfrak{n}} \quad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \text{ — бесконечные кардинальные числа}).$$

5. Если A и A' — алгебраически компактные группы, каждая из которых изоморфна сервантной подгруппе другой, то $A \cong A'$.

6. Если A — такая алгебраически компактная группа, что $A \oplus J_p \cong A' \oplus J_p$, то $A \cong A'$.

7. Если группа A алгебраически компактна и $A \oplus A \cong A' \oplus A'$, то $A \cong A'$.

8 (Мадер [1]). Редуцированная алгебраически компактная группа A является Z-адическим пополнением прямой суммы циклических групп тогда и только тогда, когда ранг факторгруппы $A/[pA + T(A)]$ не зависит от простого числа p.

§ 41. Сервантно существенные расширения

Удивительное сходство между делимыми и алгебраически компактными группами можно проследить дальше, если рассмотреть аналог делимой оболочки.

Сначала введем следующее понятие. Пусть G — сервантная подгруппа группы A и $K(G, A)$ — множество всех таких подгрупп $H \subseteq A$, что

1) $G \cap H = 0$

и

2) $(G + H)/H$ — сервантная подгруппа группы A/H.

Так как $G + H$ является прямой суммой подгрупп G и H, то условие 2) равносильно тому, что если уравнение $nx = g + h$ ($g \in G$, $h \in H$) имеет решение в группе A, то в группе G существует решение уравнения $ny = g$. Следовательно, $K(G, A)$ содержит вместе с H также все

подгруппы группы H. Из предположения, что подгруппа G сервантна в A, вытекает, что $0 \in K(G, A)$, т. е. что множество $K(G, A)$ не пусто.

Следуя Маранде [1], назовем группу A *сервантно существенным расширением* ее подгруппы G, если подгруппа G сервантна в A и $K(G, A)$ состоит только из нуля. Это равносильно тому, что подгруппа G сервантна в A и всякий гомоморфизм φ группы A, индуцирующий мономорфизм на подгруппе G, для которого φG — сервантная подгруппа группы φA, является мономорфизмом. Аналогия с существенными расширениями очевидна.

Начнем с некоторых лемм.

Лемма 41.1 (Маранда [1]). *Если G — сервантная подгруппа группы A, то существует гомоморфизм φ группы A, индуцирующий мономорфизм на подгруппе G и такой, что φA — сервантно существенное расширение подгруппы φG.*

Множество $K(G, A)$ подгрупп H группы A индуктивно. В самом деле, если $\{H_i\}_{i \in I}$ — цепь в $K(G, A)$ и H — объединение этой цепи, то условие 1) очевидно, и если уравнение $nx = g + h$ ($g \in G$, $h \in H$) разрешимо в группе A, то для некоторого i имеем $h \in H_i \in K(G, A)$, откуда следует, что уравнение $ny = g$ разрешимо в G, т. е. $H \in K(G, A)$. По лемме Цорна $K(G, A)$ содержит максимальный элемент B. Пусть φ: $A \to A/B$ — канонический эпиморфизм. Тогда $\varphi \mid G$ — мономорфизм и $\varphi G = (G + B)/B$ — сервантная подгруппа группы $\varphi A = A/B$. В силу максимальности подгруппы B $K(\varphi G, \varphi A) = \{0\}$. ∎

Лемма 41.2. *Пусть группы A_i ($i \in I$) составляют цепь и A — объединение этой цепи. Если каждая группа A_i является сервантно существенным расширением группы G, то группа A обладает тем же свойством.*

Непосредственно ясно, что если подгруппа G сервантна в каждой группе A_i, то она сервантна и в A. Если бы некоторая подгруппа $H \neq 0$ лежала в $K(G, A)$, то для некоторого i было бы $H \cap A_i \neq 0$, причем $H \cap A_i \in K(G, A_i)$, что невозможно. ∎

Лемма 41.3 (Маранда [1]). *Если C — сервантно существенное расширение группы G и A — алгебраически компактная группа, содержащая группу G в качестве сервантной подгруппы, то тождественное отображение группы G на себя можно продолжить до мономорфизма группы C в группу A.*

Так как последовательность $0 \to G \to C$ сервантно точна, а группа A сервантно инъективна, то существует гомоморфизм φ: $C \to A$, индуцирующий тождественное отображение на группе G. Так как G — сервантная подгруппа в A и, следовательно, в φC, то φ должно быть мономорфизмом. ∎

Назовем группу A *максимальным сервантно существенным расширением* группы G, если A — сервантно существенное расширение группы G и если никакая группа A', где $A \subset A'$, уже не является сервантно существенным расширением группы G. Существование таких максимальных расширений легко установить:

Предложение 41.4 (Маранда [1]). *Всякое ервантно существенное расширение группы G содержится в максимальном сервантно существенном расширении.*

Пусть C_0 — сервантно существенное расширение группы G. Предположим, что не существует максимального сервантно существенного расширения группы G, содержащего C_0. Ввиду леммы 41.2 это означает, что для любого порядкового числа σ существует такая вполне упорядоченная строго возрастающая цепочка групп

$$C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_\sigma,$$

что для всякого $\rho \leqslant \sigma$ группа C_ρ является сервантно существенным расширением группы G. Пусть A — алгебраически компактная группа, содержащая группу G в качестве сервантной подгруппы. В силу леммы 41.3 должен существовать мономорфизм $C_\sigma \to A$. Но это, очевидно, невозможно, если мощность σ больше мощности группы A. ∎

Максимальные сервантно существенные расширения легко описываются:

Предложение 41.5. *Максимальное сервантно существенное расширение группы G является минимальной алгебраически компактной группой, содержащей группу G в качестве сервантной подгруппы.*

Пусть A — максимальное сервантно существенное расширение группы G и B — группа, содержащая группу A в качестве сервантной подгруппы. По лемме 41.1 существует гомоморфизм φ группы B, индуцирующий мономорфизм на подгруппе G и такой, что φB — сервантно существенное расширение группы φG. Отсюда φG — сервантная подгруппа группы φA и, как следует из определения сервантно существенного расширения, φ — мономорфизм на группе A. Таким образом, группа $\varphi A \cong A$ служит максимальным сервантно существенным расширением для группы $\varphi G \cong G$. Отсюда $\varphi B = \varphi A$, и если произвести φ, а затем отображение, обратное отображению $\varphi | A$, то мы получим проекцию B на A. Следовательно, A — прямое слагаемое группы B, т. е. A — алгебраически компактная группа.

Если A' — такая алгебраически компактная группа, что $G \subseteq A' \subseteq \subseteq A$, то по лемме 41.3 существует мономорфизм ψ: $A \to A'$, индуцирующий тождественное отображение на группе G. Очевидно, ψA снова является максимальным сервантно существенным расширением группы G, поэтому из $\psi A \subseteq A' \subseteq A$ получаем $\psi A = A$. Следовательно, $A' = A$, и группа A минимальна. ∎

Предложение 41.6. *Минимальная алгебраически компактная группа, содержащая группу G в качестве сервантной подгруппы, является максимальным сервантно существенным расширением группы G.*

Если A — минимальная алгебраически компактная группа, содержащая группу G в качестве сервантной подгруппы, и B — максимальное сервантно существенное расширение группы G, то в силу леммы 41.3 существует мономорфизм $\varphi\colon B \to A$, совпадающий на группе G с тождественным отображением. По предложению 41.5 φB является, очевидно, алгебраически компактной группой, содержащей группу G, поэтому $\varphi B = A$ в силу минимальности группы A. ∎

Теперь мы подошли к основному результату этого параграфа.

Теорема 41.7 (Маранда [1]). *Для любой группы G существует минимальная алгебраически компактная группа A, содержащая группу G в качестве сервантной подгруппы. Группа A является максимальным сервантно существенным расширением группы G и определяется однозначно с точностью до изоморфизма над G.*

Если дана группа G, то по предложению 41.4 существует максимальное сервантно существенное расширение A группы G. Теперь первые два утверждения теоремы вытекают из предложений 41.5 и 41.6.

Пусть A и A' — две минимальные алгебраически компактные группы, содержащие группу G в качестве сервантной подгруппы. В силу леммы 41.3 тождественное отображение группы G можно продолжить до мономорфизма $\varphi\colon A \to A'$. Здесь φA является минимальной алгебраически компактной группой, содержащей $\varphi G = G$ в качестве сервантной подгруппы, поэтому $\varphi A = A'$ и φ — изоморфизм. ∎

Минимальную алгебраически компактную группу, содержащую заданную группу G в качестве сервантной подгруппы, мы будем называть *сервантно инъективной оболочкой* группы G. Последняя часть предыдущей теоремы показывает, что *всякая алгебраически компактная группа, содержащая группу G в качестве сервантной подгруппы, содержит сервантно инъективную оболочку группы G.*

Полезен следующий результат.

Лемма 41.8. *Алгебраически компактная группа A, содержащая группу G в качестве сервантной подгруппы, является сервантно инъективной оболочкой группы G тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *максимальная делимая подгруппа D группы A служит инъективной оболочкой для G^1;*

2) *A/G — делимая группа.*

Предположим сначала, что A служит сервантно инъективной оболочкой группы G. Пусть $A = D \oplus C$, где D — делимая, C — реду-

цированная группа. В силу сервантности подгруппы G в A

$$G^1 = \bigcap nG = \bigcap (G \cap nA) = G \cap A^1 = G \cap D.$$

Если бы группа D не была инъективной оболочкой подгруппы G^1, то можно было бы написать $D = D_1 \oplus D_2$, где $G^1 \subseteq D_1$ и $D_2 \neq 0$. Здесь $D_2 \in K(G, A)$, чего не может быть. Если A/G — не делимая группа, то пусть $E/G = (A/G)^1 \subset A/G$. Очевидно, $D \subseteq E$, поэтому $E = D \oplus (C \cap E)$. Из $C/(C \cap E) \cong (C + E)/E = A/E \cong (A/G)/(E/G)$ вытекает, что $C \cap E$ — замкнутая подгруппа полной группы C; поэтому $C \cap E$ — полная группа. Но тогда E — алгебраически компактная группа, строго содержащаяся в A. Этим условие 2) доказано.

Докажем достаточность. Предположим, что выполнены условия 1) и 2). В силу замечания, сделанного перед леммой, группа A содержит сервантно инъективную оболочку E группы G, т. е. $G \subseteq E \subseteq A$. Из первой части доказательства мы знаем, что E/G — делимая группа, поэтому E — сервантная подгруппа группы A, т. е. E служит для группы A прямым слагаемым, $A = E \oplus E_0$. В силу условия 2) E_0 — делимая группа, т. е. $E_0 \subseteq D$, поэтому из того, что $E_0 \cap G = 0$, и из условия 1) вытекает $E_0 = 0$. ∎

Теперь легко охарактеризовать сервантно инъективную оболочку заданной группы G.

Теорема 41.9. *Сервантно инъективная оболочка группы G изоморфна прямой сумме инъективной оболочки группы G^1 и пополнения $\hat{G}$ группы G.*

Пусть D — инъективная оболочка группы G^1, и пусть $\varphi\colon G \to D$ — продолжение вложения $G^1 \to D$. Если $\mu\colon G \to \hat{G}$ — каноническое отображение, то гомоморфизм $(\varphi \oplus \mu)\Delta\colon G \to D \oplus \hat{G}$, очевидно, является мономорфизмом, а из сервантности подгруппы μG в группе $\hat{G}$ следует, что $\operatorname{Im}(\varphi \oplus \mu)\Delta$ — сервантная подгруппа группы $D \oplus \hat{G}$. Применяя теорему 39.5 и лемму 41.8, получаем нужное утверждение. ∎

Напомним, что делимая оболочка группы G^1 определяется рангами группы G^1, а пополнение $\hat{G}$ определяется p-базисными подгруппами группы G. Следовательно, эти инварианты характеризуют сервантно инъективную оболочку группы G.

Упражнения

1. Пусть G — сервантная подгруппа группы A, и пусть $H \in K(G, A)$. Тогда если $K/H \in K((G + H)/H, A/H)$, то $K \in K(G, A)$.

2. Доказать, что $H \in K(G, A)$, если подгруппа H содержится в первой ульмовской подгруппе A^1 группы A и $H \cap G = 0$.

3. Пусть A есть p-группа и B — ее базисная подгруппа. Тогда $K(B, A)$ совпадает с множеством всех подгрупп группы A^1.

4. Пусть C — алгебраически компактная группа, содержащая группу G в качестве сервантной подгруппы. Доказать, что сервантно

инъективная оболочка A группы G, лежащая в группе C, выделяется в C прямым слагаемым.

5. Пусть B — сервантно существенное расширение группы C и A — сервантно инъективная оболочка группы B. Доказать, что A служит сервантно инъективной оболочкой и для группы C. [*Указание*: группа A содержит такую сервантно инъективную оболочку A' группы C, что $B \subseteq A'$; $A = A' \oplus A''$, где A'' — делимая группа; из леммы 41.8 следует, что $A'' = 0$.]

6. Если B — сервантно существенное расширение группы C, то B/C — делимая группа. [*Указание*: см. лемму 41.8 и упр. 5.]

7. Сервантно существенное расширение сервантно существенного расширения является сервантно существенным расширением. [*Указание*: см. упр. 5.]

8. Пусть C — сервантная подгруппа группы B и B — сервантная подгруппа группы A, причем A — сервантно существенное расширение группы C. Тогда B — сервантно существенное расширение группы C и A — сервантно существенное расширение группы B.

9. Охарактеризовать сервантно инъективную оболочку группы примера § 35.

10. Если A_i — сервантно инъективная оболочка группы G_i ($i \in I$), то $\prod A_i$ не обязательно является сервантно инъективной оболочкой группы $\prod G_i$.

§ 42*. Дополнительные сведения об алгебраически компактных группах

В последующем изложении нам часто будут встречаться алгебраически компактные группы. Знание их строения даст нам возможность получить лучшее представление о строении некоторых групп. Имеется ряд результатов, касающихся алгебраически компактных групп, которые не относятся непосредственно к нашему дальнейшему изложению. Так как их важно отметить, мы изложим их в этом параграфе.

Первый из приводимых здесь результатов показывает, что алгебраически компактные группы часто встречаются среди факторгрупп прямых произведений.

Пусть G_i ($i \in I$) — семейство групп, где множество индексов I произвольно, и пусть $\mathbf{K}$ — идеал булевой алгебры $\mathbf{I}$ всех подмножеств из I. Пусть, далее, $\mathbf{K}^*$ есть σ-идеал, порожденный идеалом $\mathbf{K}$, т. е. $\mathbf{K}^*$ состоит из всех подмножеств объединений счетного числа членов из $\mathbf{K}$ [легко видеть, что эти члены из $\mathbf{K}$ можно предполагать попарно не пересекающимися]. Мы будем интересоваться $\mathbf{K}$- и $\mathbf{K}^*$-прямыми суммами групп G_i.

Теорема 42.1 (Фукс [11]). *Если* $\mathbf{K}$ *и* $\mathbf{K}^*$ *определены как выше, то факторгруппа*

$$A = \oplus_{\mathbf{K}^*} G_i / \oplus_{\mathbf{K}} G_i \qquad (1)$$

алгебраически компактна.

Отбрасывая тривиальный случай, предположим, что $\mathbf{K} \neq \mathbf{K}^*$. Из предложения 38.5 и теоремы 38.1 следует, что нам достаточно установить разрешимость в группе A системы уравнений

$$\sum_k n_{jk} x_k = \bar{a}_j \qquad (\bar{a}_j \in A;\ j = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

со счетным числом неизвестных и уравнений, каждая конечная подсистема которой имеет решение в A. Выберем сначала представители $a_j \in \bar{a}_j$, где $a_j \in \oplus_{\mathbf{K}^*} G_i$, и рассмотрим множество индексов

$$\xi = \bigcup_{j=1}^{\infty} s(a_j);$$

так как все носители $s(a_j)$ принадлежат $\mathbf{K}^*$, то, очевидно, $\xi \in \mathbf{K}^*$. Если $\xi \in \mathbf{K}$, то $x_k = \bar{0}$ является решением. Поэтому предположим, что $\xi \notin \mathbf{K}$. По условию подсистема (2_m) системы (2), состоящая из первых m уравнений системы (2), имеет решение в группе A. Приписывая значение 0 неизвестным, не входящим явно в (2_m), мы получим для каждого m значения $x_k = \bar{g}(k, m) \in A$, удовлетворяющие первым m уравнениям системы (2).

Перейдем к системе уравнений

$$\sum_k n_{jk} x_k = a_j \qquad (a_j \in \oplus_{\mathbf{K}^*} G_i;\ j = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

и выберем какие-нибудь представители $g(k, m) \in \bar{g}(k, m)$ в группе $\oplus_{\mathbf{K}^*} G_i$, причем в качестве представителя смежного класса $\bar{0}$ возьмем 0. Система (3_m), состоящая из первых m уравнений системы (3), может не удовлетворяться значениями $x_k = g(k, m)$, но множество ξ_m индексов $i \in I$, для которых i-е компоненты элементов $\sum_k n_{jk} g(k, m)$ и a_j [как элементов из $\oplus_{\mathbf{K}^*} G_i$] при $j = 1, 2, \ldots, m$ различны, обязательно является членом идеала $\mathbf{K}$. Исходя из множеств $\xi_1, \ldots, \xi_m, \ldots \in \mathbf{K}$, определим последовательно множества $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m, \ldots \in \mathbf{K}$ так, чтобы они попарно не пересекались и чтобы было

$$\zeta_0 = \xi_1,\ \zeta_1 \supseteq \xi_2 \setminus \zeta_0,\ \ldots,\ \zeta_m \supseteq \xi_{m+1} \setminus (\zeta_0 \cup \ldots \cup \zeta_{m-1}),\ \ldots$$

и, кроме того,

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} \zeta_m = \xi \cup \xi_1 \cup \ldots \cup \xi_m \cup \ldots .$$

Это легко сделать.

Для завершения доказательства положим $g_k = (\ldots, g_{ki}, \ldots)$, где g_{ki} есть i-я компонента элемента $g(k, m)$, если $i \in \zeta_m$, и $g_{ki} = 0$ в противном случае. Тогда, очевидно, $g_k \in \oplus_{\mathbf{K}^*} G_i$. Так как i-е компоненты элементов $\sum_k n_{jk} g_k$ и a_j при $i \in \zeta_m$ совпадают, если $j \leqslant m$, то ясно, что $x_k = \bar{g}_k$ — решение всей системы (2). ∎

Если множество индексов I счетно и $\mathbf{K}$ — идеал, состоящий из всех конечных подмножеств из I, то $\mathbf{K}^* = \mathbf{I}$, и мы получаем интересный частный случай теоремы 42.1:

Следствие 42.2 (Хуляницкий [3]). *Для любого счетного семейства групп G_n $(n = 1, 2, \ldots)$ факторгруппа*

$$\prod_{n=1}^{\infty} G_n / \bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n$$

алгебраически компактна. ∎

Об инвариантах этой факторгруппы см. в работе Големы и Хуляницкого [1].

Довольно интересным свойством алгебраически компактных групп является существование в них обобщенных пределов [факт, обнаруженный Лосем [3]].

Пусть $\aleph_\sigma$ — бесконечное кардинальное число, ω_σ — первое порядковое число мощности $\aleph_\sigma$. Последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_\rho, \ldots$ $(\rho < \omega_\sigma)$ элементов группы A будем коротко обозначать через $\{a_\rho\}_{\rho<\omega_\sigma}$. Ограничимся вполне упорядоченными последовательностями одного и того же типа ω_σ.

Мы скажем, что группа A *допускает ω_σ-пределы*, если *каждой* последовательности $\{a_\rho\}_{\rho<\omega_\sigma}$ элементов группы A сопоставлен однозначно определенный элемент $a \in A$, обозначаемый через

$$a = \omega_\sigma\text{-}\lim a_\rho,$$

причем

1) $\omega_\sigma\text{-}\lim (a_\rho + b_\rho) = \omega_\sigma\text{-}\lim a_\rho + \omega_\sigma\text{-}\lim b_\rho$;
2) $\omega_\sigma\text{-}\lim a_\rho = a$, если $a_\rho = a$ для всех $\rho < \omega_\sigma$;
3) $\omega_\sigma\text{-}\lim a_\rho = \omega_\sigma\text{-}\lim b_\rho$, если $a_\rho = b_\rho$ при $\rho > \rho_0$ для некоторого фиксированного $\rho_0 < \omega_\sigma$.

Другими словами, ω_σ-предел аддитивен, сопоставляет константу последовательности констант и является одним и тем же для последовательностей, которые, начиная с некоторого места, совпадают. Несмотря на эти естественные предположения, определение может показаться на первый взгляд несколько странным, так как требуется, чтобы все последовательности типа ω_σ имели ω_σ-предел. Как можно ожидать, это дает хаусдорфову топологию только в тривиальном случае, когда $A = 0$. Но, с другой стороны, это понятие представляется интересным в свете следующей теоремы.

Теорема 42.3 (Лось [3]). *Если группа A допускает ω_0-пределы, то она алгебраически компактна. Если группа A алгебраически компактна, то она допускает ω_σ-пределы при любом σ.*

Как видно из определения, существование ω_0-пределов равносильно существованию такого гомоморфизма

$$\eta \colon A^{\aleph_0} \to A$$

прямого произведения счетного числа групп, изоморфных группе A, в группу A, что

$$\eta(a, \ldots, a, \ldots) = a \text{ и } \eta(\oplus A) = 0.$$

Следовательно, можно рассматривать η как гомоморфизм группы $A^* = A^{\aleph_0}/\oplus A$ в группу A. Пусть δ: $a \mapsto (a, \ldots, a, \ldots) + (\oplus A)$ — диагональное отображение группы A в группу A^*. Очевидно, $\delta\eta$ — эндоморфизм группы A^*, оставляющий каждый элемент из δA на месте. Значит, $\delta A \cong A$ — прямое слагаемое группы A^*. Из следствия 42.2 мы знаем, что A^* — алгебраически компактная группа, откуда группа A также алгебраически компактна.

Обратно, пусть A — алгебраически компактная группа, σ — порядковое число и $G = \prod A/\oplus A$, где в прямом произведении и в прямой сумме взято $\aleph_\sigma$ групп, изоморфных группе A. Диагональное отображение δ: $A \to G$ [где $\delta a = (a, \ldots, a, \ldots) + (\oplus A)$] является мономорфизмом, причем, очевидно, δA — сервантная подгруппа группы G. В силу алгебраической компактности группы δA имеем $G = \delta A \oplus H$ для некоторой подгруппы $H \subseteq G$. Если дана какая-то ω_σ-последовательность $\{a_\rho\}_{\rho<\omega_\sigma}$, то ее можно рассматривать как элемент из $A^{\aleph_\sigma}$, а δA-компонента определяемого ею в G смежного класса дает ω_σ-предел в A. ∎

Следует заметить, что ω_σ-пределы могут быть определены в группе A не единственным образом. В самом деле, последняя часть доказательства показывает, что при любом выборе подгруппы H можно определить ω_σ-пределы.

Упражнения

1. Группа алгебраически компактна тогда и только тогда, когда она служит прямым слагаемым для группы вида $\prod G/\oplus G$, где число компонент счетно.

2. Доказать, что всякую группу G можно вложить в качестве сервантной подгруппы в алгебраически компактную группу путем взятия диагонали в $\prod G/\oplus G$ [число компонент счетно].

3. Если дана группа G, то существует алгебраически компактная группа мощности $\leqslant |G|^{\aleph_0}$, содержащая группу G в качестве сервантной подгруппы.

4. Пусть G_n ($n = 1, 2, \ldots$) — такие редуцированные группы, что не существует натурального числа m, для которого $mG_n = 0$ при почти всех n. Доказать, что группа $\prod_n G_n/\bigoplus_n G_n$ не редуцированная.

5 (Баумслаг и Блэкберн [1]). Если G_n ($n = 1, 2, \ldots$) — редуцированные группы, то $\bigoplus_n G_n$ служит прямым слагаемым для $\prod_n G_n$ тогда и только тогда, когда $mG_n = 0$ для некоторого $m > 0$ и почти всех n. [*Указание*: для доказательства необходимости использовать упр. 4.]

6. Пусть H — подгруппа группы $\prod_{i\in I} G_i$, состоящая из элементов со счетным носителем. Доказать, что $H/\oplus G_i$ служит прямым слагаемым для $\prod G_i/\oplus G_i$.

7 (Бальцежик [3]). Пусть $A = \prod Z/\oplus Z$, где число компонент счетно. Доказать, что

$$A = \bigoplus_{\mathfrak{c}} Q \oplus \prod_{p} A_p,$$

где A_p есть p-адическое пополнение группы $\bigoplus_{\mathfrak{c}} J_p$ и $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. [*Указание*: элемент $(s_1, \ldots, m!\, s_m, \ldots) \in \prod Z$ делится по модулю $\oplus Z$ на любое m; выбрать множество мощности $\mathfrak{c}$ последовательностей $s_1, \ldots, s_m, \ldots$, где s_m равно 0 или 1 и любые две последовательности отличаются друг от друга на счетном числе мест; таким же образом доказать, что $|A/pA| = \mathfrak{c}$.]

8. Пусть A — хаусдорфова топологическая группа, в которой ω_0-пределы существуют и являются пределами в топологическом смысле. Тогда $A = 0$.

Замечания

К открытию алгебраически компактных групп Капланского [2] привела проблема описания алгебраического строения компактных абелевых групп. Он сформулировал определение в терминах теоремы разложения 40.1 и доказал, что все компактные группы являются алгебраически компактными [точный результат см. в следствиях 47.3 и 47.4]. Лось [1], [2] шел по другому пути. Он рассматривал группы, обладающие свойством, взятым нами в качестве определения алгебраической компактности, и доказал, что эти группы и только они являются прямыми слагаемыми компактных групп. Бальцежик [2] заметил, что классы групп, изучавшиеся Капланским и Лосем, совпадают. Имеющая большое значение сервантная инъективность была открыта Марандой [1]. В § 38 излагаются результаты Фукса [10].

Теория полных групп построена Капланским [2], который сообщает, что в случае групп без кручения это сделано Флейшером.

Исходя из определения сервантности для модулей, не представляет труда дать для них определение алгебраической компактности. Удивительным образом оказывается, что, как показал Варфилд [Warfield R., *Pac. J. Math.*, 28 (1969), 699—720], для коновской сервантности имеет место теорема 38.1 [за исключением п. в)]. Алгебраическая компактность над левым нётеровым кольцом R изучалась Фуксом (Fuchs L., *Ind. J. Math.*, 9 (1967), 357—374]; большинство результатов справедливо для любого кольца R. Оказывается, что алгебраическая компактность расщепляется на различные $\mathfrak{m}$-компактности, зависящие от мощности $\mathfrak{m}$ множества неизвестных в теореме 38.1, д), но это различие исчезает, как только достигнута мощность $|\mathrm{R}|$ [таким образом, для счетного кольца $\mathfrak{m}$-компактности совпадают при всех бесконечных $\mathfrak{m}$]. Об алгебраической компактности общих алгебраических систем см. Мицельский (Mycielski J., *Coll. Math.*, 13 (1964), 1—9).

Один замечательный факт, подчеркивающий важность алгебраически компактных групп, видимо, не является широко известным: инъективный модуль M над произвольным кольцом R обязательно алгебраически компактен как абелева группа [если D — делимая оболочка аддитивной группы модуля M, то M — подмодуль, а значит прямое слагаемое модуля $\mathrm{Hom}_Z(\mathrm{R}, D)$, который в силу теоремы 47.7 является алгебраически компактной группой].

Проблема 23. Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — бесконечные циклические группы. Существует ли на группе $\prod A_n$ такая топология, что $\oplus A_n$ — замкнутая подгруппа, а факторгруппа $\prod A_n/\oplus A_n$ компактна в индуцированной топологии?

Проблема 24. Охарактеризовать группы, являющиеся факторгруппами прямых произведений по прямым суммам.

Проблема 25. Описать строение ультрапроизведений.

Если A_i ($i \in I$) — множество групп и K — простой идеал булевой алгебры всех подмножеств множества I, то *ультрапроизведение* — это факторгруппа прямого произведения $\prod A_i$ по K-прямой сумме $\oplus_K A_i$. Предполагаем, что конечные подмножества множества I принадлежат K.

Проблема 26. Какие группы являются обратными пределами групп, каждая из которых — конечная прямая сумма ограниченных и квазициклических групп?

См. § 39, упр. 13.

Проблема 27. Для заданного порядкового числа $\sigma \geqslant 1$ найти группы, выделяющиеся прямыми слагаемыми из всякой группы, где они $\aleph_\sigma$-сервантны.

Проблема 28. а) Найти условия, которые нужно наложить на группу, чтобы она была (счетной) прямой суммой полных групп.
б) Охарактеризовать эти группы с помощью инвариантов.

Проблема 29. Какие алгебраически компактные группы могут быть аддитивными группами инъективных модулей?

Глава VIII

ГРУППЫ ГОМОМОРФИЗМОВ

Эта глава посвящена изучению групп гомоморфизмов. Это означает, что элементы групп — гомоморфизмы фиксированной группы A в фиксированную группу C. Тот факт, что такие гомоморфизмы образуют группу Hom (A, C), оказался исключительно глубоким. Оказалось, что группы гомоморфизмов обладают многими замечательными свойствами и могут быть использованы в различных случаях.

Наша первая задача — установить элементарные свойства групп гомоморфизмов и отметить, что они ведут себя как функторы. Неожиданным является то, что в некоторых важных случаях группа Hom (A, C) алгебраически компактна; например, это так, если A — периодическая группа или если C — алгебраически компактная группа. В этих случаях можно определить инварианты группы Hom (A, C) через инварианты групп A и C. В частности, если C — аддитивная группа действительных чисел, рассматриваемых по модулю 1 [случай, когда группа Hom (A, C), на которой введена некоторая топология, является группой характеров группы A], то получающееся описание групп Hom (A, C) приводит к полной характеризации строения компактных (абелевых) групп.

Наконец, мы коснемся теории двойственности Л. С. Понтрягина. Так как мы не собираемся изучать эту теорию слишком подробно, мы ограничимся случаем, когда более глубокие результаты не нужны. В соответствии с этим мы рассмотрим двойственность между дискретными периодическими группами и 0-мерными компактными группами.

§ 43. Группы гомоморфизмов

В § 2 мы уже отметили, что если α и β — гомоморфизмы группы A в группу C, то их сумма $\alpha + \beta$, определяемая равенством

$$(\alpha + \beta)\, a = \alpha a + \beta a \; (a \in A),$$

снова является гомоморфизмом группы A в группу C. Теперь не представляет труда проверить, что гомоморфизмы группы A в группу C образуют абелеву группу [на самом деле — подгруппу группы C^A]. Эту группу мы будем называть *группой гомоморфизмов* группы A в группу C и обозначать через Hom (A, C). Нулем этой группы является тривиальный гомоморфизм группы A в группу C, обратный элемент $-\alpha$ для элемента α: $A \to C$ переводит элемент $a \in A$ в элемент $-\alpha a \in C$.

Если $A = C$, то гомоморфизмы группы A в группу C являются эндоморфизмами группы A, и группа Hom (A, A) = End A называется *группой эндоморфизмов* группы A. Группу End A можно превратить в кольцо, см. гл. XV.

Пример 1. Если $A = Z$, то любой гомоморфизм $\alpha: Z \to C$ вполне определяется элементом $\alpha 1 = c$ ($\in C$), причем, очевидно, для каждого элемента $c \in C$ существует такой гомоморфизм $\alpha: Z \to C$, что $\alpha 1 = c$. Так как из $\alpha 1 = c_1$, $\beta 1 = c_2$ следует $(\alpha + \beta) 1 = c_1 + c_2$, то соответствие $\alpha \mapsto c$, если $\alpha 1 = c$, оказывается естественным изоморфизмом между группой $\mathrm{Hom}(Z, C)$ и группой C, т. е.

$$\mathrm{Hom}(Z, C) \cong C.$$

Пример 2. Если $A = Z(m)$, то опять каждый гомоморфизм $\alpha: Z(m) \to C$ характеризуется образом $\alpha 1 = c$ образующего элемента 1, но здесь должно выполняться условие $mc = 0$, т. е. $c \in C[m]$. Обратно, всякое такое c позволяет построить гомоморфизм $\alpha: 1 \mapsto c$, и, как в предыдущем примере, $\alpha \mapsto c$, где $\alpha 1 = c$, является естественным изоморфизмом

$$\mathrm{Hom}(Z(m), C) \cong C[m].$$

Пример 3. Пусть A — квазициклическая группа, скажем $A = \langle a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$, где $pa_1 = 0$, $pa_{n+1} = a_n$ $(n \geqslant 1)$, и пусть $A = C$. Если η — эндоморфизм группы A, то для каждого n справедливо $\eta a_n = k_n a_n$, где k_n — целое число $(0 \leqslant k_n < p^n)$. Теперь из $k_n a_n = \eta a_n = \eta(pa_{n+1}) = p\eta a_{n+1} = k_{n+1} a_n$ вытекает $k_n \equiv k_{n+1} \bmod p^n$, откуда следует, что последовательность $k_1, \ldots, k_n, \ldots$ стремится к целому p-адическому числу π. Соответствие $\eta \mapsto \pi$ между эндоморфизмами η и целыми p-адическими числами π, как легко видеть, аддитивно. Если эндоморфизмы η_1, η_2 группы A определяют одно и то же число π, то эндоморфизм $\eta_1 - \eta_2$ отображает каждый элемент a_n в 0, т. е. $\eta_1 - \eta_2 = 0$. Если $\pi = s_0 + s_1 p + \ldots + s_n p^n + \ldots$ — какое-то целое p-адическое число, то соответствие $a_n \mapsto (s_0 + s_1 p + \ldots + s_{n-1} p^{n-1}) a_n$ [этот последний элемент можно обозначить через πa_n] однозначно продолжается до такого эндоморфизма η группы A, что $\eta \mapsto \pi$. Мы получаем

$$\mathrm{End}\, Z(p^\infty) \cong J_p.$$

Пример 4. Пусть теперь $A = Q^{(p)}$ — группа рациональных чисел со знаменателями, являющимися степенями простого числа p, и пусть $C = Z(p^\infty)$. Если $C = \langle c_1, \ldots, c_n, \ldots \rangle$, где $pc_1 = 0$, $pc_{n+1} = c_n$ $(n \geqslant 1)$, и если мы условимся считать $p^{-k} c_n = c_{n+k}$ при $k \geqslant 1$, то p-адическое число $\rho = p^l \pi$ [где π есть p-адическая единица, l — целое число] будет порождать такой гомоморфизм $\eta: Q^{(p)} \to Z(p^\infty)$, что $p^{-n} \mapsto p^l \pi c_n$ [заметим, что образы чисел $p^{-n} \in Q^{(p)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ в $Z(p^\infty)$ вполне определяют гомоморфизм η]. Из предыдущего примера ясно, что различные p-адические числа ρ дадут различные гомоморфизмы, и легко проверить, что каждый элемент группы $\mathrm{Hom}(Q^{(p)}, Z(p^\infty))$ может быть так получен. Следовательно, группа $\mathrm{Hom}(Q^{(p)}, Z(p^\infty))$ изоморфна аддитивной группе всех p-адических чисел, т. е.

$$\mathrm{Hom}(Q^{(p)}, Z(p^\infty)) \cong \bigoplus_{\mathfrak{c}} Q, \quad \text{где} \quad \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$

Пример 5. Если $A = C = J_p$ — группа целых p-адических чисел, то, очевидно, умножение на фиксированное целое p-адическое число π является эндоморфизмом $\eta(\pi)$ группы J_p, причем различные целые p-адические числа дают различные эндоморфизмы, так как они по-разному действуют на элемент $1 \in J_p$. Если ξ — какой-то эндоморфизм группы J_p и $\xi 1 = \pi \in J_p$, то $\xi = \eta(\pi)$. Действительно, тогда $(\xi - \eta(\pi)) 1 = 0$, откуда $(\xi - \eta(\pi)) n = 0$ для любого целого рационального числа $n \in J_p$, т. е. Z [как подгруппа группы J_p] содержится в ядре $\mathrm{Ker}(\xi - \eta(\pi))$. Так как J_p/Z — делимая группа, а группа J_p редуцированная, то $J_p/\mathrm{Ker}(\xi - \eta(\pi)) = 0$, откуда $\xi = \eta(\pi)$, что и требовалось. Мы получаем, что

$$\mathrm{End}\, J_p \cong J_p.$$

Теперь приведем некоторые простые факты, касающиеся групп гомоморфизмов.

А) $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ в следующих случаях: 1) A — периодическая группа, C — группа без кручения; 2) A является p-группой, C является q-группой, где p, q — различные простые числа; 3) A — делимая группа, C — редуцированная группа.

Б) *Если* $C[n] = 0$ *для некоторого целого числа* n, *то* $\mathrm{Hom}(A, C)[n] = 0$ *для любой группы* A.

Пусть $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$ и $n\alpha = 0$. Для любого элемента $a \in A$ мы имеем $n(\alpha a) = (n\alpha)a = 0$, откуда в силу того, что $C[n] = 0$, получается $\alpha a = 0$, т. е. $\alpha = 0$.

В) $\mathrm{Hom}(A, C)$ — *группа без кручения, если* C — *группа без кручения.*

Г) *Если* C — *делимая группа без кручения, то* $\mathrm{Hom}(A, C)$ — *делимая группа без кручения.*

Чтобы показать, что $\mathrm{Hom}(A, C)$ — делимая группа, возьмем элемент $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$ и натуральное число n. Для любого $a \in A$ существует такой однозначно определенный элемент $c \in C$, что $nc = \alpha a$. Следовательно, мы можем рассматривать отображение β: $a \mapsto c$. Непосредственно проверяется, что β — гомоморфизм, для которого $n\beta = \alpha$.

Аналогично получается: *если* C — *группа, в которой однозначно определено деление на простое число* p, *то в группе* $\mathrm{Hom}(A, C)$ *деление на* p *также однозначно определено.*

Д) *Если для некоторого целого числа* $n > 0$ *имеет место* $nA = A$, *то* $\mathrm{Hom}(A, C)[n] = 0$.

Пусть $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$ и $n\alpha = 0$. Представим элемент $a \in A$ в виде $nb = a$, где $b \in A$. Тогда $\alpha a = \alpha(nb) = (n\alpha)b = 0$, откуда $\alpha = 0$.

Е) *Если* A — *делимая группа, то* $\mathrm{Hom}(A, C)$ — *группа без кручения.*

Ж) *Если* A — *делимая группа без кручения, то это же имеет место для группы* $\mathrm{Hom}(A, C)$.

Чтобы доказать делимость группы $\mathrm{Hom}(A, C)$, возьмем элемент $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$ и натуральное число n. Если дано $a \in A$, то существует единственный элемент $b \in A$, для которого $nb = a$. Можно проверить, что отображение β: $a \mapsto \alpha b$ является гомоморфизмом $A \to C$, причем, очевидно, $n\beta = \alpha$.

Рассмотрим теперь, как ведет себя группа $\mathrm{Hom}(A, C)$ относительно прямых сумм и прямых произведений.

Теорема 43.1. *Существует естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{i \in I} A_i, C) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(A_i, C).$$

Ограничение гомоморфизма $\alpha\colon \oplus A_i \to C$ на A_i — это гомоморфизм $\alpha_i\colon A_i \to C$. Таким путем мы получаем отображение $\alpha \mapsto$ $\mapsto (\ldots, \alpha_i, \ldots)$ группы $\mathrm{Hom}(\oplus A_i, C)$ в группу $\prod \mathrm{Hom}(A_i, C)$, которое, очевидно, является некоторым гомоморфизмом φ. Ясно, что φ переводит в $(0, \ldots, 0, \ldots)$ только элемент $\alpha = 0$, т. е. φ — мономорфизм. Так как любое множество $\{\alpha_i\}_{i\in I}$, где $\alpha_i \in \mathrm{Hom}(A_i, C)$, определяет такой элемент $\alpha \in \mathrm{Hom}(\oplus A_i, C)$, что $\alpha_i = \alpha \mid A_i$, то φ — эпиморфизм. ∎

Теорема 43.2. *Существует естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}(A, \prod_{i\in I} C_i) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, C_i).$$

Если через π_i обозначить i-ю координатную проекцию $\prod C_i \to C_i$, то каждый гомоморфизм $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, \prod C_i)$ будет определять гомоморфизмы $\pi_i\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C_i)$. Точно так же, как в предыдущем доказательстве, получаем, что $\alpha \mapsto (\ldots, \pi_i\alpha, \ldots)$ — изоморфизм групп $\mathrm{Hom}(A, \prod C_i)$ и $\prod \mathrm{Hom}(A, C_i)$. ∎

Из этих теорем непосредственно вытекают приводимые ниже следствия.

Следствие 43.3. *Пусть A — прямая сумма циклических групп, и пусть $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}_{p,k}$ — мощности множеств прямых слагаемых в разложении группы A, изоморфных соответственно группам Z и $Z(p^k)$. Тогда*

$$\mathrm{Hom}(A, C) \cong \prod_{\mathfrak{m}} C \oplus \prod_p \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{\mathfrak{m}_{p,k}} C[p^k]. \ \blacksquare$$

Следствие 43.4. *Если A — периодическая группа с p-компонентами A_p и C_p — это p-компоненты группы C, то*

$$\mathrm{Hom}(A, C) \cong \prod_p \mathrm{Hom}(A_p, C_p). \ \blacksquare$$

Заметим, что второе слагаемое в следствии 43.3 можно определить точнее, если использовать следствие 33.3 и пример 2 из § 40.

Пример 6. Для любой группы A

$$\mathrm{Hom}(A, Q) \cong \prod_{\mathfrak{n}} Q, \text{ где } \mathfrak{n} = r_0(A).$$

В силу п. Г) строение группы $\mathrm{Hom}(A, Q)$ определяется с помощью простого теоретико-множественного подсчета. Пусть F — подгруппа, порожденная максимальной независимой системой элементов бесконечного порядка группы A. Тогда, очевидно, между элементами групп $\mathrm{Hom}(A, Q)$ и $\mathrm{Hom}(F, Q)$ можно установить взаимно однозначное соответствие. Группа $\mathrm{Hom}(F, Q)$ описывается с помощью теоремы 43.1. Аналогичное рассуждение приводит к более общему результату:

$$\mathrm{Hom}(A, \bigoplus_{\mathfrak{m}} Q) \cong \prod_{\mathfrak{n}} [\bigoplus_{\mathfrak{m}} Q], \text{ где } \mathfrak{n} = r_0(A).$$

Упражнения

1. (а) Доказать утверждения Б) и В), используя то, что $\mathrm{Hom}(A, C) \subseteq C^A$.

(б) Доказать, что

$$|\mathrm{Hom}(A, C)| \leqslant |C|^{|A|}.$$

2. Показать, что $\mathrm{Hom}(A, C) \cong \mathrm{Hom}(C, A)$ и $\mathrm{Hom}(A, Q/Z) \cong A$, если A и C — конечные группы.

3. Если A — группа без кручения, C — делимая группа, то $\mathrm{Hom}(A, C)$ — делимая группа.

4. Описать группу $\mathrm{Hom}(A, Z(m))$.

5. (а) Доказать, что если C — группа без кручения, то группа $\mathrm{Hom}(Q, C)$ изоморфна максимальной делимой подгруппе группы C.

(б) Найти $\mathrm{Hom}(Q, C)$ для произвольной группы C.

6. Описать строение групп $\mathrm{Hom}(Q/Z, Q/Z)$ и $\mathrm{Hom}(J_p, Z(p^\infty))$.

7. (а) Если A и C — нетривиальные p-группы, то или $\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0$, или $\mathrm{Hom}(C, A) \neq 0$.

(б) Привести пример (ненулевых) групп без кручения A, C, для которых $\mathrm{Hom}(A, C) = 0 = \mathrm{Hom}(C, A)$.

8. Пусть A и C — редуцированные алгебраически компактные группы, A_p и C_p — их p-адические компоненты. Доказать, что имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(A, C) \cong \prod_p \mathrm{Hom}(A_p, C_p).$$

9 (Левис [1]). Если для периодической группы A выполнено $\mathrm{Hom}(A, C) \cong A$ при некоторой группе C, то A — конечная группа. [*Указание*: A — редуцированная группа; ее базисная подгруппа конечна.]

10 (Левис [1]). Ранг группы $\mathrm{Hom}(A, Z)$ не меньше n тогда и только тогда, когда группа A обладает прямым слагаемым, являющимся свободной группой ранга n. [*Указание*: индукция по n.]

11. (а) Если A — периодическая группа, то теоретико-множественное объединение $\bigcup \mathrm{Im}\,\alpha$, где α пробегает всю группу $\mathrm{Hom}(A, C)$, является подгруппой группы C.

(б)* Это не всегда так, если A — группа без кручения. [*Указание*: A — группа ранга $\geqslant 2$, эндоморфизмы которой — умножения на целые числа, а $C = A \oplus A$.]

§ 44. Точные последовательности для Hom

В этом параграфе мы покажем, что Hom — функтор. Здесь в основе лежит понятие индуцированных гомоморфизмов групп гомоморфизмов, так что прежде всего мы введем это понятие.

Пусть $\alpha\colon A' \to A$ и $\gamma\colon C \to C'$ — фиксированные гомоморфизмы. Каждый гомоморфизм $\eta \in \mathrm{Hom}(A, C)$ порождает гомоморфизм $A' \to C'$, являющийся результатом последовательного выполнения гомо-

морфизмов

$$A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\eta} C \xrightarrow{\gamma} C'.$$

Соответствие $\eta \mapsto \gamma\eta\alpha$ есть гомоморфизм группы $\mathrm{Hom}(A, C)$ в группу $\mathrm{Hom}(A', C')$, который обозначается через

$$\mathrm{Hom}(\alpha, \gamma)\colon \mathrm{Hom}(A, C) \to \mathrm{Hom}(A', C')$$

и называется *индуцированным гомоморфизмом*; точнее, этот гомоморфизм индуцируется гомоморфизмами α и γ, что отражено в нашем обозначении $\mathrm{Hom}(\alpha, \gamma)$. При $A'' \xrightarrow{\alpha'} A' \xrightarrow{\alpha} A$ и $C \xrightarrow{\gamma} C' \xrightarrow{\gamma'} C''$ легко получается, что

$$\mathrm{Hom}(\alpha\alpha', \gamma'\gamma) = \mathrm{Hom}(\alpha', \gamma')\,\mathrm{Hom}(\alpha, \gamma).$$

Ясно, что

$$\mathrm{Hom}(1_A, 1_C) = 1_{\mathrm{Hom}(A, C)}.$$

Далее, функтор $\mathrm{Hom}(\alpha, \gamma)$, очевидно, аддитивен по α и γ. Следовательно, мы получаем такой результат:

Теорема 44.1. Hom *есть аддитивный бифунктор из категории* $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *в категорию* $\mathcal{A}$, *контравариантный по первому и ковариантный по второму аргументу.* ∎

Иногда бывает удобно использовать для $\mathrm{Hom}(\alpha, 1_C)$ и $\mathrm{Hom}(1_A, \gamma)$ сокращенные обозначения, мы часто будем использовать соответственно обозначения α^* и γ_*, если это не сможет привести к недоразумению.

Следующий результат связывает Hom с пределами.

Теорема 44.2 (Картан и Эйленберг [1]). *Пусть*

$$\boldsymbol{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\} \text{ и } \boldsymbol{C} = \{C_k\ (k \in K);\ \rho_k^l\}$$

— прямой и обратный спектр групп соответственно, и пусть $A = \varinjlim A_i$, $C = \varprojlim C_k$, *где каноническими отображениями являются* $\pi_i\colon A_i \to A$ *и* $\rho_k\colon C \to C_k$. *Тогда*

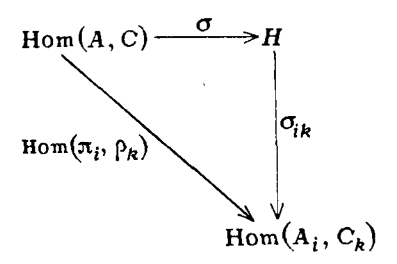
$$\boldsymbol{H} = \{\mathrm{Hom}(A_i, C_k)\ ((i, k) \in I \times K);\ \mathrm{Hom}(\pi_i^j, \rho_k^l)\}$$

есть обратный спектр групп, предел которого есть $\mathrm{Hom}(A, C)$, *причем каноническими отображениями служат* $\mathrm{Hom}(\pi_i, \rho_k)$.

Непосредственно проверяется, что $\boldsymbol{H}$ — обратный спектр. Пусть H — его предел. В силу коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A, C) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\pi_j, \rho_l)} & \searrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\pi_i, \rho_k)} & \\ \mathrm{Hom}(A_j, C_l) & \xrightarrow[\mathrm{Hom}(\pi_i^j, \rho_k^l)]{} & \mathrm{Hom}(A_i, C_k) \end{array} \qquad (i \leqslant j;\ k \leqslant l)$$

из теоремы 12.1 получаем, что существует единственный гомоморфизм σ, для которого коммутативны все диаграммы



где σ_{ik} — канонические отображения. Чтобы показать, что σ — мономорфизм, возьмем $\eta \in \operatorname{Ker} \sigma$. Тогда $\sigma_{ik}\sigma\eta = 0$, т. е. $\rho_k\eta\pi_i = \operatorname{Hom}(\pi_i, \rho_k)\eta = 0$ при всех i, k. Следовательно, $\eta\pi_i$: $A_i \to C$ — нулевой гомоморфизм, так как все k-е координаты — нули. Из равенства $\bigcup \pi_i A_i = A$ получаем, что $\eta = 0$. Любой элемент $\chi \in H$ имеет вид

$$\chi = (\ldots, \chi_{ik}, \ldots) \in \prod \operatorname{Hom}(A_i, C_k),$$

где координаты χ_{ik} удовлетворяют нужным условиям. Пусть η: $A \to C$ — такое отображение, что если $a = \pi_i a_i$, то $\eta a = (\ldots, \chi_{ik} a_i, \ldots) \in \prod C_k$. Легко проверить, что ηa не зависит от выбора элемента a_i и что η — гомоморфизм. Заметив, что $\sigma_{ik}\chi = \chi_{ik}$ и $\sigma_{ik}\sigma\eta = \rho_k\eta\pi_i = \chi_{ik}$, получаем $\sigma\eta = \chi$. Это означает, что σ — эпиморфизм, т. е. изоморфизм. ∎

В качестве приложения полученного результата докажем

Предложение 44.3. *Для любого кардинального числа* $\mathfrak{m}$ *группа*

$$\operatorname{Hom}(Z(p^\infty), \bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^\infty))$$

изоморфна p-адическому пополнению группы $\bigoplus_{\mathfrak{m}} J_p$.

Так как $Z(p^\infty) = \varinjlim Z(p^n)$, искомая группа гомоморфизмов является в силу теоремы 44.2 обратным пределом групп $\operatorname{Hom}(Z(p^n), \bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^\infty)) \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^n)$. Простое рассуждение показывает, что отображение $n+1$-го члена на n-й как раз переводит компоненту $Z(p^{n+1})$ в соответствующую группу $Z(p^n)$. Следовательно, обратный предел должен быть таким же, как для G/p^nG, где $G = \bigoplus_{\mathfrak{m}} J_p$, а это — p-адическое пополнение группы G. ∎

Исключительно важным результатом, касающимся функтора Hom, является существование для Hom двух точных последовательностей, выражающих тот факт, что функтор Hom точен слева.

Теорема 44.4 (Картан и Эйленберг [1]). *Пусть*

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

— короткая точная последовательность. Тогда для любой группы G индуцированные последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}(B, G) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(A, G), \qquad (2)$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(G, A) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}(G, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(G, C) \qquad (3)$$

точны.

Чтобы доказать, что β^* — мономорфизм, предположим, что $\eta\colon C \to G$ — гомоморфизм, для которого $0 = \beta^*\eta = \eta\beta$. Так как β — эпиморфизм, то $\eta = 0$. В силу того, что $\alpha^*\beta^* = (\beta\alpha)^* = 0^* = 0$, нам нужно еще только проверить справедливость включения $\mathrm{Ker}\,\alpha^* \subseteq \mathrm{Im}\,\beta^*$. Пусть $\eta \in \mathrm{Ker}\,\alpha^*$, т. е. $\eta\alpha = 0$. По лемме 2.2 существует такой гомоморфизм $\chi \in \mathrm{Hom}(C, G)$, что $\chi\beta = \eta$. Поэтому последовательность (2) точна.

Если $\eta \in \mathrm{Ker}\,\alpha_*$, т. е. $\alpha\eta = 0$, то $\eta = 0$, так как α — мономорфизм. Имеем $\beta_*\alpha_* = (\beta\alpha)_* = 0_* = 0$, поэтому достаточно доказать, что любой элемент $\eta \in \mathrm{Ker}\,\beta_*$ лежит в $\mathrm{Im}\,\alpha_*$. В силу леммы 2.1 из равенства $0 = \beta_*\eta = \beta\eta$ следует, что существует $\chi \in \mathrm{Hom}(G, A)$, для которого $\alpha\chi = \eta$, т. е. $\eta \in \mathrm{Im}\,\alpha_*$. Это доказывает точность последовательности (3). ∎

Естественно возникает вопрос, какие условия нужно наложить на группу G, чтобы последовательности (2) и (3) можно было дополнить в конце отображением $\to 0$ и получить более длинные точные последовательности. На этот вопрос легко дать полный ответ:

Предложение 44.5. *Если дана группа G, то для любой точной последовательности* (1) *последовательность* (2) [*соответственно последовательность* (3)] *с отображением $\to 0$ в конце точна тогда и только тогда, когда G — делимая* [*свободная*] *группа.*

Очевидно, α^* является эпиморфизмом в точности тогда, когда для любого $\xi\colon A \to G$ существует такой гомоморфизм $\eta\colon B \to G$, что $\eta\alpha = \xi$. Но это означает инъективность группы G. Утверждение, касающееся последовательности (3), получается двойственным образом. ∎

Прежде чем доказывать следующее предложение, нам нужно сказать несколько слов о том, какое действие на группу $\mathrm{Hom}(A, C)$ оказывают эндоморфизмы групп A и C. Если $\alpha\colon A \to A$ и $\gamma\colon C \to C$ — эндоморфизмы, то индуцированные отображения $\alpha^*\colon \eta \mapsto \eta\alpha$ и $\gamma_*\colon \eta \mapsto \gamma\eta$, очевидно, являются эндоморфизмами группы $\mathrm{Hom}(A, C)$. Для этих индуцированных эндоморфизмов выполняется

$$\alpha^*\gamma_* = \gamma_*\alpha^*,$$

как следует из закона ассоциативности $(\gamma\eta)\,\alpha = \gamma\,(\eta\alpha)$. Таким образом, эндоморфизмы групп A и C индуцируют перестановочные эндоморфизмы группы $\mathrm{Hom}\,(A,\ C)$. Особенно интересен случай, когда эти эндоморфизмы являются умножениями на целые числа.

Предложение 44.6. *Если α и γ — умножения на целое число n, то α^* и γ_* — умножения на то же число n.*

Если α: $a \mapsto na$ $(a \in A)$, то при любом η: $A \to C$ имеем $(\alpha^*\eta)\,a = \eta\alpha a = \eta n a = (n\eta)\,a$, откуда $\alpha^*\eta = n\eta$. Для γ_* утверждение доказывается аналогично. ∎

В заключение мы докажем предложение, аналогичное теореме 44.4, для сервантно точных последовательностей.

Предложение 44.7 (Фукс [9]). *Если последовательность* (1) *сервантно точна, то последовательности* (2) *и* (3) *также сервантно точны.*

Чтобы проверить, что $\mathrm{Im}\,\beta^*$ есть p-сервантная подгруппа группы $\mathrm{Hom}\,(B,\ G)$, возьмем $\eta \in \mathrm{Hom}\,(B,\ G)$ и $\chi \in \mathrm{Hom}\,(C,\ G)$, для которых $p^n\eta = \chi\beta$. Тогда из включения $\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq \mathrm{Ker}\,\chi\beta = \mathrm{Ker}\,p^n\eta$ будем иметь $\mathrm{Im}\,p^n\alpha \subseteq \mathrm{Ker}\,\eta$. Согласно предположению и теореме 27.10, существует прямое разложение

$$B/p^n\,(\alpha A) = \alpha A/p^n\,(\alpha A) \oplus B'/p^n\,(\alpha A),$$

где B' — некоторая подгруппа группы B. Обозначив через π проекцию на второе слагаемое, положим $\varphi b = \eta'\pi\,(b + p^n\alpha A)$ [где $\eta'\,(b + p^n\alpha A) = \eta b$]. Это даст нам гомоморфизм φ: $B \to G$, для которого $p^n\varphi = p^n\eta$. Так как $\alpha A \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$, то существует такое θ: $C \to G$, что $\varphi = \theta\beta$, и из $p^n\,(\theta\beta) = p^n\varphi = p^n\eta = \chi\beta$ вытекает, что последовательность (2) p-сервантно точна.

Обратимся к последовательности (3). Пусть $p^n\eta = \alpha\chi$, где $\eta \in \mathrm{Hom}\,(G,\ B)$, $\chi \in \mathrm{Hom}\,(G,\ A)$. Тогда $p^n\eta$ отображает группу G в αA, а η отображает группу G в $p^{-n}\alpha A$. В силу теоремы 28.4 группа αA служит прямым слагаемым для $p^{-n}\alpha A$, т. е.

$$p^{-n}\alpha A = \alpha A \oplus B',$$

где B' — некоторая подгруппа группы B. Если π — проекция на первое слагаемое, то для $\varphi = \alpha^{-1}\pi\eta \in \mathrm{Hom}\,(G,\ A)$ выполнено $p^n\alpha\varphi = \alpha\chi$, так как $p^nB' = 0$. Следовательно, (3) есть p-сервантно точная последовательность. ∎

Следующий результат является точным аналогом предложения 44.5.

Предложение 44.8. *Если группа G фиксирована, то для любой сервантно точной последовательности* (1) *последовательность* (2) [*последовательность* (3)] *остается точной при добавлении в конце отображения $\to 0$ тогда и только тогда, когда группа G алгебраически компактна* [*является прямой суммой циклических групп*].

Так же как в доказательстве предложения 44.5, получается, что сформулированное условие эквивалентно сервантной инъективности [сервантной проективности]. ■

Упражнения

1. Доказать, что End $J_p \cong J_p$, используя изоморфизм

$$\mathrm{End}\, J_p \cong \varprojlim_n \mathrm{Hom}\,(J_p,\ Z\,(p^n)).$$

2. Для кардинального числа $\mathfrak{m}$ найти строение групп $\mathrm{Hom}\,(Q/Z,\ \bigoplus_{\mathfrak{m}} Q/Z)$ и $\mathrm{Hom}\,(Q/Z,\ \prod_{\mathfrak{m}} Q/Z)$.

3. Описать строение групп $\mathrm{Hom}\,(\bigoplus_{\mathfrak{m}} Q,\ \bigoplus_{\mathfrak{m}} Q)$ и $\mathrm{Hom}\,(\bigoplus_{\mathfrak{m}} J_p,\ \bigoplus_{\mathfrak{m}} J_p)$ для любого кардинального числа $\mathfrak{m}$.

4. Найти $\mathrm{Hom}\,(A,\ J_p)$ для произвольной группы A.

5. Если группа A или группа C является p-группой, то $\mathrm{Hom}\,(A, C)$ есть p-адический модуль.

6. (а) Если α [соответственно γ] — автоморфизм группы A [группы C], то он индуцирует автоморфизм группы $\mathrm{Hom}\,(A,\ C)$.

(б) Вывести из (а) утверждения Ж) и Г) из § 43.

7. Пусть α: $A \to B$ — такой мономорфизм, что для любой группы G индуцированное отображение α^*: $\mathrm{Hom}\,(B, G) \to \mathrm{Hom}\,(A, G)$ является эпиморфизмом. Показать, что αA служит для группы B прямым слагаемым.

8. Пусть β: $B \to C$ — эпиморфизм. Если для любой группы G индуцированное отображение β_*: $\mathrm{Hom}\,(G, B) \to \mathrm{Hom}\,(G, C)$ является эпиморфизмом, то последовательность $0 \to \mathrm{Ker}\,\beta \to B \to C \to 0$ расщепляется.

9. Если (1) — такая точная последовательность, что последовательность (2) [или последовательность (3)] сервантно точна при любой группе G, то (1) — сервантно точная последовательность. [*Указание*: взять $G = B/p^n\alpha A$ или $G = Z$; в первом случае $\mathrm{Hom}\,(C,\ *)$ — сервантная подгруппа группы $\mathrm{Hom}\,(B/p^n\alpha A,\ *)$, причем факторгруппа по этой подгруппе ограниченная.]

10. Последовательность (1) является сервантно точной тогда и только тогда, когда для любой группы $G = Z\,(m)$ отображение α^* в последовательности (2) [отображение β_* в последовательности (3)] — эпиморфизм.

11. Пусть $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точная последовательность. Индуцированная последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(T,\ A) \to \mathrm{Hom}\,(T,\ B) \to \mathrm{Hom}\,(T,\ C) \to 0$$

точна для любой периодической группы T тогда и только тогда, когда последовательность периодических частей

$$0 \to T\,(A) \to T\,(B) \to T\,(C) \to 0$$

точна и расщепляется. [*Указание*: выбрать $T = T\,(C)$.]

§ 45*. Некоторые подгруппы группы Hom

В различных исследованиях оказались полезными некоторые усиления теоремы 44.4. Если, как в предложении 44.7, предполагать не только точность последовательности (1), то при некоторых условиях можно сказать больше об индуцированных последовательностях (2), (3) § 44. Мы хотим дать довольно общий метод получения утверждений, более тонких, чем теорема 44.4. Изложение будет вестись в соответствии с работой автора (Фукс [12]).

Мы будем иметь дело с категорией $\mathcal{A}$ абелевых групп и с одним из следующих двух типов категорий, получаемых с помощью $\mathcal{A}$.

Во-первых, для каждого объекта $A \in \mathcal{A}$ выберем идеал $\mathbf{I}_A$ структуры $\mathbf{L}(A)$ всех подгрупп группы A [инвариантность этого выбора при изоморфизме *не* предполагается]. Обозначим через $(\mathcal{A}, \mathbf{I})$ *категорию*, *объекты* которой — пары $(A, \mathbf{I}_A)$ для всех $A \in \mathcal{A}$ и *морфизмы* которой —

$$\alpha\colon (A, \mathbf{I}_A) \to (B, \mathbf{I}_B), \tag{1}$$

где $\alpha\colon A \to B$ — групповой гомоморфизм, при котором

$$\alpha\mathbf{I}_A = \{\alpha A' \mid A' \in \mathbf{I}_A\} \subseteq \mathbf{I}_B,$$

т. е. подгруппы из $\mathbf{I}_A$ отображаются на подгруппы из $\mathbf{I}_B$. Легко проверить, что $(\mathcal{A}, \mathbf{I})$ действительно является категорией.

В отличие от обычного в теории категорий определения назовем *мономорфизмом* отображение (1), являющееся групповым мономорфизмом и удовлетворяющее условию

$$\alpha\mathbf{I}_A = \{\alpha A \cap B' \mid B' \in \mathbf{I}_B\}.$$

Эпиморфизмом назовем отображение (1), на которое можно сокращать справа. Легко видеть, что это просто морфизм категории $(\mathcal{A}, \mathbf{I})$, являющийся эпиморфизмом в обычном теоретико-групповом смысле. Назовем последовательность

$$0 \to (A, \mathbf{I}_A) \xrightarrow{\alpha} (B, \mathbf{I}_B) \xrightarrow{\beta} (C, \mathbf{I}_C) \to 0$$

точной или, эквивалентно этому, назовем последовательность $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ $\mathbf{I}$-*точной*, если α и β — соответственно мономорфизм и эпиморфизм в категории $(\mathcal{A}, \mathbf{I})$.

Приведем некоторые примеры. В силу определения морфизмов достаточно рассматривать объекты, а они характеризуются идеалом $\mathbf{I}_A$. Идеал $\mathbf{I}_A$ можно выбрать состоящим из 1) всех подгрупп группы A; 2) конечных или конечно (ко)порожденных подгрупп; 3) ограниченных или периодических подгрупп группы A; 4) ограниченных или произвольных p-подгрупп; 5) подгрупп, мощность которых меньше бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$; 6) подгрупп, являющихся

эпиморфными образами групп некоторого класса, замкнутого относительно взятия подгрупп и конечных прямых сумм; наконец, 7) в качестве объектов можно взять все пары $(A, \mathbf{I}_A)$, где $A \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{I}_A$ пробегает все идеалы из $\mathbf{L}(A)$. Легко видеть, что $\mathbf{I}$-точность в случаях 1) — 6) эквивалентна точности последовательности.

Выберем теперь в структуре $\mathbf{L}(A)$ дуальный идеал $\mathbf{D}_A$ для каждого $A \in \mathcal{A}$ и обозначим через $(\mathcal{A}, \mathbf{D})$ *категорию*, состоящую из *объектов* $(A, \mathbf{D}_A)$ для всех $A \in \mathcal{A}$ и *морфизмов*

$$\varphi\colon (A, \mathbf{D}_A) \to (B, \mathbf{D}_B), \tag{2}$$

где $\varphi\colon A \to B$ — такой групповой гомоморфизм, что для любого $B' \in \mathbf{D}_B$ существует $A' \in \mathbf{D}_A$, для которого $\varphi A' \subseteq B'$. Другими словами, если рассматривать группы с определенной на них $\mathbf{D}$-топологией, то морфизмы категории $(\mathcal{A}, \mathbf{D})$ — это не что иное, как непрерывные гомоморфизмы. Отсюда сразу следует, что $(\mathcal{A}, \mathbf{D})$ — снова категория.

Теперь для определения мономорфизмов в категории $(\mathcal{A}, \mathbf{D})$ мы используем, двойственным образом, возможность сокращать слева, т. е. назовем морфизм (2) *мономорфизмом*, если это мономорфизм в теоретико-групповом смысле. Морфизм φ назовем *эпиморфизмом* категории $(\mathcal{A}, \mathbf{D})$, если это групповой эпиморфизм, для которого $\varphi\mathbf{D}_A = \mathbf{D}_B$. Ясно, как определить *точность* последовательности

$$0 \to (A, \mathbf{D}_A) \xrightarrow{\alpha} (B, \mathbf{D}_B) \xrightarrow{\beta} (C, \mathbf{D}_C) \to 0$$

и $\mathbf{D}$-*точность* последовательности $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$.

Можно привести много примеров категорий типа $(\mathcal{A}, \mathbf{D})$. Каждый из указанных выше примеров 1) — 6) даст пример категории $(\mathcal{A}, \mathbf{D})$, если заменить требование, наложенное на подгруппы, таким же требованием на соответствующие факторгруппы. Еще пример — аналог примера 7). Наконец, в качестве $\mathbf{D}_A$ можно взять дуальный идеал всех существенных подгрупп группы A. Снова $\mathbf{D}$-точность в примерах 1) — 6) означает просто точность, а в последнем примере она означает слабо сервантную точность.

Вместо того, чтобы рассматривать группы морфизмов в категории $(\mathcal{A}, \mathbf{I})$ или $(\mathcal{A}, \mathbf{D})$, мы обратимся к более важным подгруппам группы Hom.

Пусть $A \in \mathcal{A}$ и $(C, \mathbf{I}_C) \in (\mathcal{A}, \mathbf{I})$. Рассмотрим все гомоморфизмы $\eta\colon A \to C$ (в категории $\mathcal{A}$), для которых

$$\operatorname{Im} \eta \in \mathbf{I}_C. \tag{3}$$

Если для гомоморфизма $\eta_1\colon A \to C$ имеет место $\operatorname{Im} \eta_1 \in \mathbf{I}_C$, то из $\operatorname{Im}(\eta_1 - \eta) \subseteq \operatorname{Im} \eta_1 + \operatorname{Im} \eta$ получаем, что множество всех гомоморфизмов, для которых выполнено условие (3), является подгруппой группы $\operatorname{Hom}(A, C)$. Эту подгруппу мы будем обозначать через $\operatorname{Hom}(A, C \mid \mathbf{I})$.

Аналогично при $(A, \mathbf{D}_A) \in (\mathcal{A}, \mathbf{D})$ и $C \in \mathcal{A}$ множество всех гомоморфизмов χ: $A \to C$ (в категории $\mathcal{A}$), для которых

$$\operatorname{Ker} \chi \in \mathbf{D}_A, \tag{4}$$

является подгруппой $\operatorname{Hom}(A \mid \mathbf{D}, C)$ группы $\operatorname{Hom}(A, C)$. В самом деле, если для χ_1: $A \to C$ также имеет место включение $\operatorname{Ker} \chi_1 \in \mathbf{D}_A$, то из $\operatorname{Ker} \chi \cap \operatorname{Ker} \chi_1 \subseteq \operatorname{Ker}(\chi - \chi_1)$ следует, что одновременно с χ и χ_1 также $\chi - \chi_1$ обладает свойством (4).

Наконец,

$$\operatorname{Hom}(A \mid \mathbf{D}, C \mid \mathbf{I}) = \operatorname{Hom}(A, C \mid \mathbf{I}) \cap \operatorname{Hom}(A \mid \mathbf{D}, C),$$

очевидно, является множеством всех гомоморфизмов $A \to C$, для которых выполнено и (3), и (4).

Морфизмы α: $(B, \mathbf{D}_B) \to (A, \mathbf{D}_A)$ и φ: $(C, \mathbf{I}_C) \to (D, \mathbf{I}_D)$ индуцируют гомоморфизм

$$\operatorname{Hom}(\alpha, \varphi)\colon \quad \operatorname{Hom}(A \mid \mathbf{D}, C \mid \mathbf{I}) \to \operatorname{Hom}(B \mid \mathbf{D}, D \mid \mathbf{I}),$$

а именно, $\eta \mapsto \varphi\eta\alpha$. В самом деле, $\operatorname{Im} \varphi\eta\alpha \subseteq \operatorname{Im} \varphi\eta \in \varphi\mathbf{I}_C \subset \mathbf{I}_D$, и если для $B' \in \mathbf{D}_B$ выполнено $\alpha B' \subseteq \operatorname{Ker} \eta \in \mathbf{D}_A$, то $B' \subseteq \operatorname{Ker} \eta\alpha \subseteq \operatorname{Ker} \varphi\eta\alpha$. В силу этого мы заключаем, что $\operatorname{Hom}(A \mid \mathbf{D}, C \mid \mathbf{I})$ — аддитивный бифунктор из категории $(\mathcal{A}, \mathbf{D}) \times (\mathcal{A}, \mathbf{I})$ в категорию $\mathcal{A}$, контравариантный по первому и ковариантный по второму аргументам.

В следующих теоремах мы для простоты положим $\operatorname{Hom}(\alpha, 1) = \alpha^*$, $\operatorname{Hom}(1, \varphi) = \varphi_*$.

Теорема 45.1 (Фукс [12]). *Если* $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ *есть* $\mathbf{D}$-*точная последовательность, то для любой группы* G *и любой категории* $(\mathcal{A}, \mathbf{I})$ *индуцированная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Hom}(C \mid \mathbf{D}, G \mid \mathbf{I}) \xrightarrow{\beta^*} \operatorname{Hom}(B \mid \mathbf{D}, G \mid \mathbf{I}) \xrightarrow{\alpha^*} \operatorname{Hom}(A \mid \mathbf{D}, G \mid \mathbf{I})$$

точна.

Тот факт, что β^* — мономорфизм, непосредственно вытекает из теоремы 44.4. По той же причине $\alpha^*\beta^* = 0$. Следовательно, достаточно проверить справедливость включения $\operatorname{Ker} \alpha^* \subseteq \operatorname{Im} \beta^*$. Пусть $\eta \in \operatorname{Ker} \alpha^*$. Тогда по теореме 44.4 существует такой гомоморфизм $\chi \in \operatorname{Hom}(C, G)$, что $\chi\beta = \eta$. Очевидно, $\operatorname{Im} \chi = \operatorname{Im} \eta \in \mathbf{I}_G$, а из того, что $\operatorname{Ker} \chi \supseteq \beta \operatorname{Ker} \eta$ и $\operatorname{Ker} \eta \in \mathbf{D}_B$, следует, что $\operatorname{Ker} \chi \in \mathbf{D}_C$. Таким образом, $\chi \in \operatorname{Hom}(C \mid \mathbf{D}, G \mid \mathbf{I})$. ∎

Теорема 45.2 (Фукс [12]). *Если* $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ *есть* $\mathbf{I}$-*точная последовательность, то для любой группы* G *и любой категории* $(\mathcal{A}, \mathbf{D})$ *имеем точную последовательность*

$$0 \to \operatorname{Hom}(G \mid \mathbf{D}, A \mid \mathbf{I}) \xrightarrow{\alpha_*} \operatorname{Hom}(G \mid \mathbf{D}, B \mid \mathbf{I}) \xrightarrow{\beta_*} \operatorname{Hom}(G \mid \mathbf{D}, C \mid \mathbf{I}).$$

Как и в доказательстве теоремы 45.1, мы можем ограничиться проверкой справедливости включения $\operatorname{Ker} \beta_* \subseteq \operatorname{Im} \alpha_*$. Пусть $\eta \in$

$\in \operatorname{Ker} \beta_*$. В силу теоремы 44.4, для некоторого $\chi \in \operatorname{Hom}(G, A)$ выполнено $\alpha\chi = \eta$. Так как α — мономорфизм, то $\operatorname{Ker} \chi = \operatorname{Ker} \eta \in \mathbf{D}_G$. Очевидно, $\alpha \operatorname{Im} \chi = \operatorname{Im} \eta \in \mathbf{I}_B$, поэтому $\operatorname{Im} \chi \in \mathbf{I}_A$. Таким образом, $\chi \in \operatorname{Hom}(G \mid \mathbf{D}, A \mid \mathbf{I})$. ∎

Займемся, наконец, представлением группы $\operatorname{Hom}(A \mid \mathbf{D}, C \mid \mathbf{I})$ в виде прямого предела.

Идеал $\mathbf{I}_C$ очевидным образом определяет прямой спектр $\{C_i \ (i \in J); \ \pi_i^j\}$ подгрупп C_i группы C: включение $C_i \subseteq C_j$ означает, что $i \leqslant j$, а отображения π_i^j: $C_i \to C_j$ — вложения. Аналогично $\mathbf{D}_A$ определяет обратный спектр $\{A/A_k \ (k \in K); \ \rho_k^l\}$ факторгрупп группы A, где $k \leqslant l$ тогда и только тогда, когда $A_k \supseteq A_l$, а отображения ρ_k^l: $A/A_l \to A/A_k$ индуцируются тождественным отображением группы A, т. е. ρ_k^l: $a + A_l \mapsto a + A_k$. Легко проверить, что

$$\{\operatorname{Hom}(A/A_k, C_i) \ ((k, i) \in K \times J); \ \operatorname{Hom}(\rho_k^l, \pi_i^j)\}$$

— прямой спектр групп. Кроме того, справедливо

Предложение 45.3 (Фукс [12]). *Существует естественный изоморфизм*

$$\varinjlim \operatorname{Hom}(A/A_k, C_i) \cong \operatorname{Hom}(A \mid \mathbf{D}, C \mid \mathbf{I}).$$

Обозначим предел прямого спектра через H, и пусть σ_{ki}: $\operatorname{Hom}(A/A_k, C_i) \to H$ — канонические гомоморфизмы, т. е. $\sigma_{lj} \operatorname{Hom}(\rho_k^l, \pi_i^j) = \sigma_{ki}$ при $i \leqslant j$, $k \leqslant l$. Так как π_i^j — мономорфизмы, а ρ_k^l — эпиморфизмы, то из теоремы 44.4 вытекает, что $\operatorname{Hom}(\rho_k^l, \pi_i^j)$ — мономорфизмы. Следовательно, по п. е) § 11 σ_{ki} — мономорфизмы. Для естественных гомоморфизмов ρ_k: $A \to A/A_k$ и вложений π_i: $C_i \to C$ отображения

$$\operatorname{Hom}(\rho_k, \pi_i): \operatorname{Hom}(A/A_k, C_i) \to \operatorname{Hom}(A \mid \mathbf{D}, C \mid \mathbf{I})$$

таковы, что

$$\operatorname{Hom}(\rho_l, \pi_j) \operatorname{Hom}(\rho_k^l, \pi_i^j) = \operatorname{Hom}(\rho_k, \pi_i) \quad (i \leqslant j; \ k \leqslant l).$$

Поэтому в силу теоремы 11.1 существует такой однозначно определенный гомоморфизм σ: $H \to \operatorname{Hom}(A \mid \mathbf{D}, C \mid \mathbf{I})$, что

$$\operatorname{Hom}(\rho_k, \pi_i) = \sigma\sigma_{ki}. \tag{5}$$

Снова в силу теоремы 44.4 отображение, стоящее в левой части, является мономорфизмом. То же должно иметь место для σ, так как если элемент $h \in H$ лежит в $\operatorname{Ker} \sigma$, то при $h = \sigma_{ki}\eta_{ki}$ [для некоторого $\eta_{ki} \in \operatorname{Hom}(A/A_k, C_i)$] получается $\operatorname{Hom}(\rho_k, \pi_i)\eta_{ki} = \sigma\sigma_{ki}\eta_{ki} = \sigma h = 0$, откуда $\eta_{ki} = 0$ и $h = 0$. Чтобы доказать, что σ — эпиморфизм, примем во внимание то, что группы $\operatorname{Hom}(\rho_k, \pi_i) \operatorname{Hom}(A/A_k, C_i)$

исчерпывают вместе всю группу Hom (A | **D**, C | **I**). Поэтому из (5) вытекает, что σ — эпиморфизм и, следовательно, изоморфизм. Что он — естественный, ясно из определения. ∎

Упражнения

1. Проверить справедливость утверждений, сформулированных в приведенных выше примерах и касающихся **I**-точности и **D**-точности последовательностей.

2. (Фукс [12]). Для категории ($\mathcal{A}$, **I**) обозначим через $\mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}$ (A, C) множество всех морфизмов (A, $\mathbf{I}_A$) → (C, $\mathbf{I}_C$). Доказать, что

(а) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}$ (A, C) — подгруппа группы Hom (A, C);

(б) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}$ — точный слева функтор по обоим аргументам.

3 (Фукс [12]). Для категории ($\mathcal{A}$, **D**) обозначим через $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}$ (A, C) множество всех морфизмов (A, $\mathbf{D}_A$) → (C, $\mathbf{D}_C$). Проверить справедливость утверждений, аналогичных утверждениям (а) и (б) в упр. 2.

4. Пусть категория ($\mathcal{A}$, **I**) такова, что $\mathbf{I}_A$ состоит из всех подгрупп группы A, принадлежащих некоторому классу групп $\mathfrak{X}$ [замкнутому относительно взятия прямых сумм, подгрупп и эпиморфных образов], и пусть ($\mathcal{A}$, **D**) — категория, где $\mathbf{D}_A$ состоит из всех подгрупп $A' \subseteq A$, для которых $A/A' \in \mathfrak{X}$. Показать, что Hom (A | **D**, C) = = Hom (A, C | **I**).

5. Привести примеры категорий ($\mathcal{A}$, **I**) и ($\mathcal{A}$, **D**), где Hom (A | **D**, C | **I**) перестановочен по обоим аргументам с взятием бесконечных прямых сумм. [*Указание*: взять подгруппы конечного порядка и конечного индекса соответственно.]

6. Пусть ($\mathcal{A}$, **I**) — категория, где $\mathbf{I}_A$ состоит из всех ограниченных подгрупп группы A. Если B — базисная подгруппа p-группы A, то

(а) Hom (A, C | **I**) ≅ Hom (B, C | **I**);

(б) Hom (B, C | **I**) — периодическая часть группы Hom (B, C);

(в) если $A = \oplus A_i$, то Hom (A, C | **I**) — периодическая часть прямого произведения групп Hom (A_i, C | **I**).

7. Пусть ($\mathcal{A}$, **I**) — категория, где $\mathbf{I}_A$ — все конечные подгруппы группы A. Пусть A — периодическая или полная группа с p-компонентами A_p. Доказать, что имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(A, C \mid \mathbf{I}) \cong \bigoplus_p \mathrm{Hom}(A_p, C).$$

8* (Пирс [1]). Пусть Hom_s (A, C) — группа всех малых гомоморфизмов p-группы A в группу C [определение см. в следующем параграфе]. Доказать, что функтор Hom_s (*, C) переводит сервантно точную последовательность в точную последовательность.

§ 46. Группы гомоморфизмов периодических групп

Мы рассмотрели некоторые элементарные свойства функтора Hom, а также точные последовательности для Hom. Перейдем теперь к определению строения группы Hom (A, C) в некоторых случаях. Очевидно,

Hom (A, C) зависит от заданных групп A и C, а из изоморфизма Hom (Z, C)$\cong C$ следует, что любая группа C может быть группой Hom. Однако замечательно, что если A — периодическая группа, то группа Hom (A, C) обязательно алгебраически компактна и, следовательно, можно надеяться охарактеризовать ее с помощью инвариантов групп A и C. В силу следствия 43.4 достаточно рассматривать p-группы.

Теорема 46.1 (Фукс [9], Харрисон [2]). *Если группа A — периодическая, то* Hom (A, C) — *редуцированная алгебраически компактная группа для любой группы C.*

Первое доказательство. Докажем, что если A есть p-группа, то группа Hom (A, C) полна в своей p-адической топологии [см. предложение 40.1]. Чтобы доказать, что группа H = Hom (A, C) хаусдорфова, предположим, что элемент $\eta \in H$ делится на любую степень числа p. Если элемент $a \in A$ имеет порядок p^k, то пусть для $\chi \in H$ выполнено равенство $p^k\chi = \eta$. Тогда из $\eta a = p^k\chi a = \chi p^k a = 0$ вытекает $\eta = 0$. Пусть, далее, $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ — последовательность Коши в группе H. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы можем предположить, что эта последовательность чистая: $\eta_{n+1} - \eta_n \in p^n H$ для любого n, т. е. $\eta_{n+1} - \eta_n = p^n\chi_n$, $\chi_n \in H$. Положим

$$\eta = \eta_1 + (\eta_2 - \eta_1) + \ldots + (\eta_{n+1} - \eta_n) + \ldots;$$

это гомоморфизм $A \to C$, так как для элемента $a \in A$ порядка p^k имеем $(\eta_{n+1} - \eta_n)\, a = 0$ при всех $n \geqslant k$, откуда следует, что $\eta a = \eta_1 a + (\eta_2 - \eta_1)\, a + \ldots + (\eta_k - \eta_{k-1})\, a$ определено корректно. Кроме того,

$$\eta - \eta_n = (\eta_{n+1} - \eta_n) + (\eta_{n+2} - \eta_{n+1}) + \ldots = \\ = p^n(\chi_n + p\chi_{n+1} + \ldots),$$

где $\chi_n + p\chi_{n+1} + \ldots$ снова принадлежит H, т. е. $\eta - \eta_n \in p^n H$, и η — предел данной последовательности Коши. Следовательно, H — полная группа.

Второе доказательство. Так как A — периодическая группа, она является прямым пределом своих конечных подгрупп A_i. Тогда в силу теоремы 44.2 группа Hom (A, C) — обратный предел групп Hom (A_i, C), ограниченных ввиду следствия 43.3. Следовательно, Hom (A, C) — обратный предел редуцированных алгебраически компактных групп, и нужное утверждение следует из предложения 39.4. ∎

Чтобы определить точнее строение группы Hom (A, C) для периодической группы A, мы можем, не теряя общности, ограничиться слу-

чаем, когда A и C являются p-группами. Пусть

$$B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \text{где } B_n = \bigoplus_{\mathfrak{m}_n} Z(p^n), \tag{1}$$

— базисная подгруппа группы A, и пусть C — редуцированная группа. Точная последовательность $0 \to B \xrightarrow{\alpha} A \to A/B \to 0$ индуцирует точную последовательность

$$0 = \operatorname{Hom}(A/B, C) \to \operatorname{Hom}(A, C) \xrightarrow{\alpha^*} \operatorname{Hom}(B, C),$$

откуда следует, что Hom (A, C) можно рассматривать как подгруппу группы Hom (B, C). Соответствующая факторгруппа является группой без кручения, так как если $p^k\eta = \chi\alpha$, где $\chi \in \operatorname{Hom}(A, C)$, $\eta \in \operatorname{Hom}(B, C)$, то можно определить θ: $A \to C$ как $\theta a = \chi g + \eta b$, если $a \in A$ и $a = p^k g + \alpha b$ $(g \in A,\ b \in B)$. Легко видеть, что θ является гомоморфизмом[1]) и что $\theta\alpha = \eta$. Отсюда следует, что $\operatorname{Hom}(B, C)/\alpha^* \operatorname{Hom}(A, C)$, — группа без кручения. В силу теоремы 46.1 Hom (A, C) и Hom (B, C) — алгебраически компактные группы. Поэтому получается

$$\operatorname{Hom}(B, C) \cong \operatorname{Hom}(A, C) \oplus X,$$

где X есть p-адическая алгебраически компактная группа без кручения.

Из следствия 43.3 мы имеем

$$\operatorname{Hom}(B, C) \cong \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mathfrak{m}_n} C[p^n].$$

Группы $C[p^n]$ являются прямыми суммами циклических групп порядков $\leqslant p^n$, и то же верно для $\prod_{\mathfrak{m}_n} C[p^n]$. Инварианты этих групп можно оценить с помощью кардинальных инвариантов группы C, поэтому, используя следствие 33.3, можно получить описание базисной подгруппы V периодической части группы Hom (B, C). Группа Hom (A, C) — прямая сумма p-адического пополнения $\hat{V}$ группы V и p-адической алгебраически компактной группы без кручения Y, строение которой мы будем знать, как только определим строение ее базисной подгруппы W.

Для доказательства основной леммы 46.3 нам понадобится следующая лемма, касающаяся теории множеств.

Лемма 46.2 (Пирс [1]). *Пусть I — множество бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — такое кардинальное число, что $0 < \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$. Тогда существует множество $\{I_j\}_{j \in J}$ подмножеств из I со свойствами:*

1) $|I_j| = \mathfrak{n}$ *для каждого* j;

2) $|J| = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$;

[1]) Это верно, если группа C не содержит элементов бесконечной высоты.— *Прим. перев.*

3) *подмножества* I_j *независимы в том смысле, что если* $I_0, I_1, \ldots, I_n$ — *различные элементы множества* $\{I_j\}_{j\in J}$, *то* I_0 *не содержится в объединении* $I_1 \cup \ldots \cup I_n$.

Следующее простое доказательство принадлежит Эрдешу и Хайналу.

Пусть K — множество мощности $\mathfrak{m}$. Его можно разложить на $\mathfrak{n}$ непересекающихся подмножеств L_l, каждое из которых имеет мощность $\mathfrak{m}$. Очевидно, что если $\{K_j\}_{j\in J}$ — семейство всех подмножеств множества K, содержащих ровно один элемент из каждого L_l, то это семейство обладает свойствами 1) и 2), а свойство 3) заменено тем, что подмножества K_j не содержатся одно в другом. Пусть теперь I_j — множество всех конечных подмножеств из K_j. Тогда множество $\{I_j\}_{j\in J}$ обладает не только свойствами 1) и 2), но и свойством 3), так как если $c_i \in I_0 \setminus I_i$, $i = 1, \ldots, n$, то $\{c_1, \ldots, c_n\} \in I_0$ и $\{c_1, \ldots, c_n\} \notin I_1 \cup \ldots \cup I_n$. Остается элементам заданного множества I поставить во взаимно однозначное соответствие конечные подмножества из K. ∎

Теперь может быть доказана

Лемма 46.3 (Пирс [1]). *Если* A, C — *редуцированные* p-*группы, базисные подгруппы* B, D *которых имеют бесконечные финальные ранги* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, *то базисная подгруппа* W *группы* Y *имеет ранг* $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Рассуждение, подобное проведенному в начале доказательства теоремы 36.1, показывает, что от групп A и C можно отщепить ограниченные прямые слагаемые так, что получится $r(B) = \mathfrak{m}$ и $r(D) = \mathfrak{n}$. Ограниченные прямые слагаемые не влияют на W, поэтому можно, не нарушая общности, предположить, что $r(B) = \mathfrak{m}$, $r(D) = \mathfrak{n}$.

Из следствия 34.4 получаем оценку $|C| \leqslant |D|^{\aleph_0}$, откуда

$$|W| \leqslant |\mathrm{Hom}(A, C)| \leqslant |\mathrm{Hom}(B, C)| \leqslant |C|^{|B|} \leqslant D^{\aleph_0 |B|} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что в группе $\mathrm{Hom}(A, C)$ существует p-независимое множество S элементов бесконечного порядка, для которого $|S| = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Основная идея доказательства — рассмотреть *малые* гомоморфизмы $\varphi\colon A \to C$, которые определяются условием

(*) для любого $k \geqslant 0$ существует такое $n_\varphi(k)$, что из $e(a) \geqslant n_\varphi(k)$ вытекает $e(\varphi a) \leqslant e(a) - k$ при всяком $a \in A$.

Эти гомоморфизмы имеют то преимущество, что они полностью определяются своим ограничением на B, причем на B они могут быть какими угодно. В самом деле, если φ — малый гомоморфизм группы A в группу C и элемент $a \in A$ имеет порядок p^k, то выберем $n = n_\varphi(k)$ в соответствии с условием (*) и запишем $a = p^n g + b$, где $g \in A$, $b \in B$ и $e(p^n g) \leqslant e(a)$ [это можно сделать, так как подгруппа B сер-

вантна в A]. Тогда из $e(\varphi g) \leqslant e(g) - k$ будет следовать, что $p^n \varphi g = 0$, т. е. $\varphi a = \varphi b$. Далее, если φ' — малый гомоморфизм группы B в группу C, то, полагая $\varphi a = \varphi' b$, мы получаем малый гомоморфизм $\varphi: A \to C$ [для которого $n_\varphi(k) = n_{\varphi'}(k)$]. Следовательно, малые гомоморфизмы групп A и B по существу совпадают.

Легко проверить, что малые гомоморфизмы группы A в C образуют подгруппу H группы $\mathrm{Hom}(A, C)$. Факторгруппа $\mathrm{Hom}(A, C)/H$ является группой без кручения, так как если $\eta \in \mathrm{Hom}(A, C)$ и $p^r\eta \in H$, то вместе с гомоморфизмом $p^r\eta$ гомоморфизм η также удовлетворяет условию (*), где $n_\eta(k) = n_{p^r\eta}(k + r)$. Следовательно, H — сервантная подгруппа группы $\mathrm{Hom}(A, C)$, и достаточно найти нужное нам множество S в подгруппе H.

Рассмотрим два случая.

Случай I: $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$. Возьмем прямое слагаемое

$$D_0 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle d_n \rangle$$

группы D, в котором $0 < e(d_1) < \ldots < e(d_n) < \ldots$, и разложим группу B следующим образом:

$$B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} G_n, \text{ где } G_n = \bigoplus_{i \in I_n} \langle b_{ni} \rangle, \tag{2}$$

$\mathrm{fin}\, r(G_n) = |I_n| = \mathfrak{m}$ и $e(b_{ni}) \geqslant 2e(d_n) \geqslant 2n$ для $n \geqslant 1$; множества индексов I_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), конечно, не пересекаются. В I_n выберем такие подмножества I_{nj} ($j \in J$), что

$$|I_{nj}| = \mathfrak{m}, \ |J| = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{m}} \text{ и } I_{nj} \text{ независимы;} \tag{3}$$

это возможно в силу леммы 46.2. Без ограничения общности можно считать J одним и тем же для всех n. Определим гомоморфизмы $\varphi_j: B \to D_0$ следующим образом:

$$\varphi_j b_{ni} = \begin{cases} d_n, & \text{если } i \in I_{nj},\ n \geqslant 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Эти гомоморфизмы φ_j являются малыми, так как $e(d_n) \leqslant \frac{1}{2} e(b_{ni})$, и из $e(b_{ni}) \geqslant 2k$ вытекает неравенство $e(\varphi_j b_{ni}) \leqslant e(b_{ni}) - k$, откуда легко следует, что условие (*) выполнено при $n_\varphi(k) = 2k$. Каждый гомоморфизм φ_j имеет бесконечный порядок, так как $d_n \in \mathrm{Im}\, \varphi_j$ при всех n. Гомоморфизмы φ_j являются p-независимыми. Действительно, если

$$\varphi = m_0\varphi_0 + m_1\varphi_1 + \ldots + m_s\varphi_s \in p^r H \quad (m_i \neq 0),$$

то по (3) существует индекс $i_0 \in I_{n0}$, не лежащий в объединении $I_{n1} \cup \ldots \cup I_{ns}$. Для этого индекса i_0 имеем $\varphi_0 b_{ni_0} = d_n$, $\varphi_1 b_{ni_0} = \ldots = \varphi_s b_{ni_0} = 0$, откуда $\varphi b_{ni_0} = m_0 d_n$. Этот элемент должен принадле-

жать p^rC, и из сервантности подгруппы D_0 следует, что $p^r \mid m_0$. Аналогично $p^r \mid m_1, \ldots, m_s$, что доказывает p-независимость множества $S = \{\varphi_j\}_{j\in J}$, имеющего мощность $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Случай II: $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Разложим группу D так:

$$D = \bigoplus_{n=1}^{\infty} G'_n, \text{ где } G'_n = \bigoplus_{k\in K_n} \langle d_{nk}\rangle, \qquad (4)$$

$|K_n| = \mathfrak{n}$ и $e(d_{nk}) \geqslant n$. Выберем в множестве K_n такие подмножества K_{nl} $(l \in L)$, что

$$|K_{nl}| = \mathfrak{m}, \ |L| = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} \text{ и } K_{nl} \text{ независимы.} \qquad (5)$$

Пусть f_{nl} — отображение множества K_{nl} в множество I_n из равенств (2), при котором всякое $i \in I_n$ является образом самое большее одного элемента $k \in K_{nl}$ и, если $f_{nl}k = i$, то $2e(d_{nk}) \leqslant e(b_{ni})$. Ясно, что такое f_{nl} существует при любых n, l. Для каждого $l \in L$ определим гомоморфизм ψ_l: $B \to D$ следующим образом:

$$\psi_l b_{ni} = \begin{cases} d_{nk}, & \text{если } i = f_{nl}k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как и выше, получается, что ψ_l — малый гомоморфизм бесконечного порядка. Чтобы проверить, что множество $S = \{\psi_l\}_{l\in L}$ является p-независимым, предположим, что

$$\psi = m_0\psi_0 + m_1\psi_1 + \ldots + m_s\psi_s \in p^rH \quad (m_t \neq 0).$$

Существует такое $k_0 \in K_{n0}$, что $k_0 \notin K_{n1} \cup \ldots \cup K_{ns}$. Для $i_0 = f_{n0}k_0$ мы имеем $\psi_0 b_{ni_0} = d_{nk_0}$, $\psi_1 b_{ni_0} = \ldots = \psi_s b_{ni_0} = 0$. Из $\psi b_{ni_0} = m_0 d_{nk_0}$, как и в случае I, получаем $p^r \mid m_0$ и аналогично $p^r \mid m_1, \ldots, m_s$. Это доказывает p-независимость множества S. ∎

Теперь мы в состоянии вывести основной результат. Введем следующие обозначения. Пусть (1) — базисная подгруппа группы A и

$$D = \bigoplus_{n=1}^{\infty} D_n, \text{ где } D_n = \bigoplus_{\mathfrak{n}_n} Z(p^n), \qquad (6)$$

— базисная подгруппа группы C. Положим

$$\mathfrak{m} = \operatorname{fin} r(B), \ \mathfrak{n} = \operatorname{fin} r(D), \ \mathfrak{p} = \operatorname{fin} r(C). \qquad (7)$$

Для кардинальных чисел $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{b}$ положим

$$d(\mathfrak{u}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} \mathfrak{u}\mathfrak{b}, & \text{если } \mathfrak{u} \text{ конечно,} \\ (2\mathfrak{b})^{\mathfrak{u}}, & \text{если } \mathfrak{u} \text{ бесконечно,} \end{cases}$$

и заметим, что

$$[\bigoplus_{\mathfrak{b}} Z(p^n)]^{\mathfrak{u}} = \bigoplus_{d(\mathfrak{u},\mathfrak{b})} Z(p^n).$$

Теорема 46.4 (Пирс [1]). *Пусть A и C — редуцированные p-группы. Тогда* Hom (A, C) *есть p-адическая алгебраически компактная группа, базисным подмодулем которой служит*

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} [\bigoplus_{\mathfrak{r}_n} Z(p^n)] \oplus [\bigoplus_{\mathfrak{r}_0} J_p],$$

где при $n \geqslant 1$

$$\mathfrak{r}_n = d\left(\mathfrak{m}_n, \mathfrak{p} + \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{n}_k\right) + d\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathfrak{m}_k, \mathfrak{n}_n\right),$$

а

$$\mathfrak{r}_0 = d(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}).$$

Очевидно, $C[p^n] = D_1 \oplus \ldots \oplus D_{n-1} \oplus E_n$, где E_n — прямая сумма $\mathfrak{p} + \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{n}_k$ групп, изоморфных $Z(p^n)$. Так как $\mathfrak{r}_n$ — мощность множества прямых слагаемых, изоморфных $Z(p^n)$, в базисной подгруппе периодической части группы $\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mathfrak{m}_n} C[p^n]$, то, как показано в следствии 33.3,

$$\bigoplus_{\mathfrak{r}_n} Z(p^n) \cong E_n^{\mathfrak{m}_n} \oplus \prod_{k=n+1}^{\infty} D_n^{\mathfrak{m}_n} = E_n^{\mathfrak{m}_n} \oplus D_n^{\mathfrak{p}_n},$$

где $\mathfrak{p}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathfrak{m}_n$. Это дает доказательство нужной формулы для $\mathfrak{r}_n$ $(n \geqslant 1)$, тогда как для $\mathfrak{r}_0$ соответствующая формула получается в лемме 46.3, где для нулевых $\mathfrak{m}$ или $\mathfrak{n}$ она тривиальна. ∎

В силу доказанной теоремы, алгебраическое строение группы Hom (A, C) может быть полностью описано, если A — периодическая, C — редуцированная группа. Если группа C содержит подгруппы вида $Z(p^\infty)$, то строение группы Hom (A, C) получается на основании теоремы 46.4 и упр. 8—10 из § 47.

Упражнения

1 (Пирс [1]). Показать, что условие (*) эквивалентно следующему условию: для любого $k \geqslant 0$ существует такое n, что из $e(a) \leqslant k$ и $h(a) \geqslant n$ следует $\varphi a = 0$.

2. (а) Если φ — малый гомоморфизм группы A, то

$$B + \operatorname{Ker} \varphi = A$$

для любой базисной подгруппы B группы A.

(б) $A^1 \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$.

3. Пусть $A = B \oplus D$, где B — ограниченная, D — делимая группа. Описать малые гомоморфизмы группы A в любую группу.

4 (Пирс [1]). (а) Гомоморфизм группы A в группу C, не являющийся малым, существует в каждом из следующих случаев: 1) A —

неограниченная, C — нередуцированная группа; 2) A — неограниченная группа, C — группа, содержащая подгруппу, изоморфную группе A; 3) группа A обладает неограниченной базисной подгруппой и счетна, а группа C неограниченная.

(б) Все гомоморфизмы группы A в группу C являются малыми, если 1) группа A имеет ограниченную базисную подгруппу, а группа C — редуцированная; 2) группа C — ограниченная.

5 (Пирс [1]). Пусть $B = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$ — базисная подгруппа группы A, и пусть для элементов $c_i \in C$ $(i \in I)$ выполнено: 1) $e(c_i) \leqslant e(a_i)$; 2) для любого $k \geqslant 0$ существует такое n, что если $e(c_i) \geqslant n$, то $e(c_i) \leqslant e(a_i) - k$. Тогда существует однозначно определенный малый гомоморфизм φ группы A в группу C, при котором $\varphi(a_i) = c_i$ $(i \in I)$.

6 (Пирс [1]). Пусть G — сервантная подгруппа p-группы A. Всякий малый гомоморфизм группы G в группу C можно продолжить до гомоморфизма группы A в C. [*Указание*: использовать упр. 5.]

7 (Пирс [1]). (а) Гомоморфизм φ является малым, если $p^m\varphi$ — малый гомоморфизм при некотором m.

(б) Малый гомоморфизм группы p^mA в группу p^mC можно продолжить до малого гомоморфизма группы A в группу C. [*Указание*: использовать упр. 5.]

8. Пусть группы A, C — такие же, как в теореме 46.4. Найти финальные ранги группы $\mathrm{Hom}(A, C)$ и ее базисную подгруппу.

9. Пусть C — редуцированный p-адический модуль, и пусть группа A имеет периодическую p-базисную подгруппу. Тогда $\mathrm{Hom}(A, C)$ — алгебраически компактная группа.

§ 47. Группы характеров

В предыдущем параграфе мы рассматривали группы $\mathrm{Hom}(A, C)$ для периодических групп A и редуцированных групп C. Наша следующая задача — исследовать случай, когда группа A произвольна, а группа C совпадает с аддитивной группой K действительных чисел, рассматриваемых по модулю 1. В этом случае группа $\mathrm{Hom}(A, K)$ [снабженная соответствующей топологией] известна под названием *группы характеров* $\mathrm{Char}\, A$ группы A. В настоящем параграфе мы сосредоточим внимание на алгебраическом строении группы $\mathrm{Char}\, A$; тот факт, что в ней определена топология, в большинстве случаев в § 47 использоваться не будет. Приводимые результаты дадут полную информацию о строении групп характеров.

С алгебраической точки зрения группа K является просто прямым произведением квазициклических групп, взятых по одной для каждого простого числа p. Следовательно,

$$\mathrm{Char}\, A \cong \prod_p \mathrm{Hom}(A, Z(p^\infty)).$$

Таким образом, достаточно рассмотреть группы $\mathrm{Hom}(A, Z(p^\infty))$.

Пусть

$$B=\bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n, \text{ где } B_0=\bigoplus_{\mathfrak{m}_0} Z,\ B_n=\bigoplus_{\mathfrak{m}_n} Z(p^n) \text{ при } n\geqslant 1,$$

есть p-базисная подгруппа группы A. В группе A/B ее p-компонента имеет вид $\bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^\infty)$. То, что $\mathfrak{m}$ не является инвариантом, не существенно, но можно сделать $\mathfrak{m}$ однозначно определенным, если выбрать в p-компоненте группы A нижнюю базисную подгруппу. Наконец, пусть $\mathfrak{k}$—ранг без кручения группы A/B. [Полученные кардинальные числа будут обозначаться через $\mathfrak{m}_0(p), \ldots, \mathfrak{k}(p)$, если их зависимость от p будет существенна.] Следующая теорема дает полную информацию о группах гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, Z(p^\infty))$.

Теорема 47.1 (Фукс [8]). *Для любой группы A*

$$\mathrm{Hom}(A, Z(p^\infty))\cong \prod_{\mathfrak{m}_0} Z(p^\infty)\oplus \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\mathfrak{m}_n} Z(p^n)\oplus \prod_{\mathfrak{m}} J_p\oplus \prod_{\mathfrak{k}\aleph_0} Q. \quad (1)$$

В силу предложений 44.5 и 44.7, если последовательность $0\to B\to A\to A/B\to 0$ является p-сервантно точной, то p-сервантно точна индуцированная последовательность $0\to \mathrm{Hom}(A/B, Z(p^\infty))\to \mathrm{Hom}(A, Z(p^\infty))\to \mathrm{Hom}(B, Z(p^\infty))\to 0$. По теореме 43.1

$$\mathrm{Hom}(B, Z(p^\infty))\cong \prod_{n=0}^{\infty}\mathrm{Hom}(B_n, Z(p^\infty))\cong \prod_{\mathfrak{m}_0} Z(p^\infty)\oplus \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\mathfrak{m}_n} Z(p^n).$$

Если написать $A/B=\bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^\infty)\oplus G$, где $G[p]=0$, то, так как

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^\infty), Z(p^\infty))\cong \prod_{\mathfrak{m}}\mathrm{Hom}(Z(p^\infty), Z(p^\infty))\cong \prod_{\mathfrak{m}} J_p,$$

останется оценить группу $\mathrm{Hom}(G, Z(p^\infty))$. Пусть H есть p-сервантная подгруппа группы G, порожденная максимальной независимой системой элементов бесконечного порядка группы G. Подгруппа H определена корректно, так как в группе G деление на p осуществляется единственным образом, и, очевидно, $H\cong \bigoplus_{\mathfrak{k}} Q^{(p)}$, а G/H — периодическая группа с нулевой p-компонентой. Из точности последовательности $0\to H\to G\to G/H\to 0$ вытекает точность последовательности $0=\mathrm{Hom}(G/H, Z(p^\infty))\to \mathrm{Hom}(G, Z(p^\infty))\to \mathrm{Hom}(H, Z(p^\infty))\to 0$, поэтому

$$\mathrm{Hom}(G, Z(p^\infty))\cong \mathrm{Hom}(H, Z(p^\infty))\cong \prod_{\mathfrak{k}}\mathrm{Hom}(Q^{(p)}, Z(p^\infty))\cong \prod_{\mathfrak{k}}(\bigoplus_{2^{\aleph_0}} Q);$$

здесь использован пример 4 из § 43. Мы видим, что группа $\mathrm{Hom}(A/B, Z(p^\infty))$ — прямая сумма делимой группы и p-адической

алгебраически компактной группы, поэтому из ее p-сервантности в группе Hom $(A, Z(p^\infty))$ вытекает, что она служит прямым слагаемым для группы Hom $(A, Z(p^\infty))$.■

Заметим, что группу в формуле (1) можно задать в более явном виде, если использовать примеры из § 23 и 40. Если мы найдем кардинальные числа $\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{m}_n$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{k}$ для каждого простого числа p, то группу Char A можно будет определить как прямое произведение групп (1), где p пробегает все простые числа.

Заметим еще, что первое и четвертое слагаемые в (1) получаются с помощью элементов бесконечного порядка, а два средних слагаемых— с помощью элементов, порядки которых равны степеням числа p. Таким образом, имеем

Следствие 47.2. *Группа* Char A *является редуцированной тогда и только тогда, когда группа A периодическая, и является делимой группой тогда и только тогда, когда A — группа без кручения.*■

Вид группы (1) показывает, что она алгебраически компактна. Это позволяет получить тот известный факт, что группы характеров алгебраически компактны, не пользуясь глубокой теоремой о том, что группы характеров дискретных абелевых групп [с соответствующей топологией]—это в точности компактные абелевы группы.

Естественно задать вопрос, при каких условиях алгебраически компактная группа допускает компактную топологию, т. е. является группой характеров. Эти условия нетрудно установить: они представляют собой неравенства для кардинальных чисел [см. упр. 5]. Но мы предпочитаем сформулировать нужные нам условия в более простой форме, как это сделано в двух приводимых ниже следствиях.

Очевидно, кардинальные числа $\mathfrak{m}_n$ и $\mathfrak{m}$ можно выбрать произвольно и независимо для каждого простого числа p. Поэтому мы имеем

Следствие 47.3 (Хуляницкий [2], Харрисон [1]). *Редуцированная группа является группой характеров некоторой (периодической) группы тогда и только тогда, когда она — прямое произведение циклических p-адических модулей [число p не обязано быть фиксированным].*■

Для делимых групп должно выполняться простое неравенство:

Следствие 47.4 (Харрисон [1]). *Ненулевая делимая группа есть группа характеров некоторой группы (являющейся группой без кручения) тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\prod_p \prod_{\mathfrak{r}_p} Z(p^\infty) \oplus \prod_{\mathfrak{r}} Q, \quad \text{где } \mathfrak{r} \geqslant \aleph_0.$$

Если A — группа без кручения, то ее ранг в приведенных выше обозначениях равен $\mathfrak{m}_0(p) + \mathfrak{k}(p)$. Это означает, что группа Char A будет иметь нужный вид, где $\mathfrak{r}_p = \mathfrak{m}_0(p)$, всегда, кроме случая, когда $\mathfrak{k}(p) = 0$ для каждого p. Но в этом случае прибавление группы $\prod_{\aleph_0} Q$

в качестве прямого слагаемого не меняет строения первого прямого произведения. Обратно, если дана делимая группа указанного выше вида, то простой подсчет показывает, что строение группы не изменится, если заменить $\mathfrak{r}$ на $\mathfrak{r} + \sum_p \mathfrak{r}_p$, т. е. можно предполагать, что $\mathfrak{r} \geqslant \mathfrak{r}_p$. Если A — прямая сумма $\mathfrak{r}$ рациональных групп G_i, причем ровно для $\mathfrak{r}_p$ из них $pG_i \neq G_i$ и для $\mathfrak{r}$ из них $pG_i = G_i$, то легко получить, что Char A имеет требуемый вид. ∎

Другое достаточно важное следствие принадлежит Какутани.

Следствие 47.5. *Группа характеров группы бесконечной мощности* $\mathfrak{n}$ *имеет мощность* $2^{\mathfrak{n}}$.

Легко доказать, что $\mathfrak{n}$ равно сумме всех кардинальных чисел $\mathfrak{m}_0(p), \ldots, \mathfrak{k}(p)$, взятых для каждого p. Поэтому прямое произведение групп вида (1) должно иметь мощность $2^{\mathfrak{n}}$. ∎

Так как мощность множества неизоморфных групп мощности $\leqslant \mathfrak{n}$ не превосходит $2^{\mathfrak{n}}$ ($\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$), то из следствия 47.5 ясно, что множество неизоморфных компактных (абелевых) групп мощности $\leqslant 2^{\mathfrak{n}}$ имеет мощность, не превосходящую $2^{\mathfrak{n}}$. Кроме того, имеет место следующий достаточно неожиданный факт [который также показывает, что, хотя компактная топология накладывает значительные ограничения на строение группы, само строение группы практически совсем не оказывает влияния на компактные топологии на группе]:

Теорема 47.6 (Фукс [8]). *Для любого бесконечного кардинального числа* $\mathfrak{n}$ *существует* $2^{\mathfrak{n}}$ *неизоморфных компактных групп мощности* $2^{\mathfrak{n}}$, *которые алгебраически все изоморфны между собой.*

В доказательстве нам понадобится результат из главы XII. Именно, существует $2^{\mathfrak{n}}$ попарно неизоморфных p-групп мощности $\mathfrak{n}$, причем их можно даже выбрать так, что они будут иметь изоморфные базисные подгруппы $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{\mathfrak{n}} Z(p^n)$ и одинаковый финальный ранг $\mathfrak{n}$. По теореме 47.1 группы характеров этих групп изоморфны

$$\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mathfrak{n}} Z(p^n) \oplus \prod_{\mathfrak{n}} J_p.$$

В силу теории двойственности Л. С. Понтрягина, они не изоморфны как топологические группы [см. следующий параграф]. ∎

Последнюю теорему можно сравнить с другим крайним случаем: группа $J_p^{\mathfrak{m}}$ допускает лишь одну компактную топологию [топологию конечных индексов]. В самом деле, теорема 47.1 показывает, что единственной дискретной группой, группа характеров которой алгебраически изоморфна группе $J_p^{\mathfrak{m}}$, является группа $\bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^\infty)$. [Мы предполо-

жили справедливой обобщенную гипотезу континуума, чтобы можно было утверждать, что $\mathfrak{m}$ определено однозначно.]

Методы, изложенные в этом параграфе, позволяют описать группы гомоморфизмов в алгебраически компактные группы. Основным здесь является такой результат:

Теорема 47.7 (Фукс [9]). *Если группа C алгебраически компактна, то для любой группы A группа* $\mathrm{Hom}(A, C)$ *также алгебраически компактна.*

Из теоремы 38.1 мы знаем, что группа C служит прямым слагаемым для прямого произведения коциклических групп. Следовательно, $\mathrm{Hom}(A, C)$ — прямое слагаемое группы вида $\prod \mathrm{Hom}(A, C_i)$, где C_i — коциклические группы [см. теорему 43.2]. Если C_i — конечная циклическая группа, скажем порядка p^n, то $\mathrm{Hom}(A, C_i)$ является p^n-ограниченной, т. е. алгебраически компактной группой. Если C_i — квазициклическая группа, то по теореме 47.1 группа $\mathrm{Hom}(A, C_i)$ также алгебраически компактна. Следовательно, $\prod \mathrm{Hom}(A, C_i)$ — алгебраически компактная группа, и все доказано. ■

Как мы знаем, алгебраически компактные группы могут быть охарактеризованы полными системами кардинальных инвариантов, поэтому в силу теоремы 47.7 то же можно получить для группы $\mathrm{Hom}(A, C)$, где C — алгебраически компактная группа. При этом инварианты группы $\mathrm{Hom}(A, C)$ могут быть выражены через инварианты группы C и некоторые инварианты группы A. Подробности см. в упражнениях.

Упражнения

1. (а) Пусть C — алгебраически компактная группа, и пусть G — сервантная подгруппа группы A. Проверить, что имеет место изоморфизм $\mathrm{Hom}(A, C) \cong \mathrm{Hom}(G, C) \oplus \mathrm{Hom}(A/G, C)$.

(б) $\mathrm{Char}\, A \cong \mathrm{Char}\, G \oplus \mathrm{Char}\, A/G$.

2. Пусть A, B — редуцированные p-группы. Указать необходимое и достаточное условие для существования изоморфизма $\mathrm{Char}\, A \cong \mathrm{Char}\, B$ (в алгебраическом смысле).

3. (а) Аддитивная группа действительных чисел допускает бесконечно много компактных топологий, при которых она — топологическая группа. [*Указание*: $\mathrm{Char}(\bigoplus_n Q)$.]

(б) Для каких групп A группа $\mathrm{Char}\, A$ является делимой группой без кручения? Проверить для такой группы $\mathrm{Char}\, A$ справедливость утверждения (а).

4. Если A — факторгруппа группы $Z^{\aleph_0}$ по прямой сумме $\oplus Z$, то

$$A = \mathrm{Char} \bigoplus_{\aleph_0} (Q \oplus Q/Z).$$

[*Указание*: § 42, упр. 7.]

5. (Хуляницкий [1]). Ненулевая делимая группа

$$D = \bigoplus_{\mathfrak{m}} Q \oplus \bigoplus_{p} \bigoplus_{\mathfrak{m}_p} Z(p^\infty)$$

допускает компактную топологию в точности тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{m}$ имеет вид $2^{\mathfrak{n}}$, где $\mathfrak{n}$ — бескоиечное кардииальное число;

2) $\mathfrak{m}_p$ конечно или имеет вид $2^{\mathfrak{n}_p}$, где $\mathfrak{n}_p$ — бесконечное кардинальное число;

3) $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_p$ для любого p.

6. Если C — полная группа, то Hom (A, C) является обратным пределом ограниченных групп.

7. Если C есть p-адическая алгебраически компактная группа, а B есть p-базисная подгруппа группы A, то Hom $(B, C) \cong$ Hom (A, C).

8 (Пирс [1]). Если $A \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^\infty)$, $C \cong \bigoplus_{\mathfrak{n}} Z(p^\infty)$, то группа Hom (A, C) изоморфна p-адическому пополнению прямой суммы $d(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ групп, изоморфных группе J_p. [*Указание*: применить теорему 44.4 к точной последовательности $0 \to A[p] \to A \xrightarrow{p} A \to 0$ и группе C.]

9. Определить инварианты алгебраически компактной группы Hom (B, C) в случае, когда B — прямая сумма циклических p-групп, а $C = \bigoplus_{\mathfrak{n}} Z(p^\infty)$.

10. Пусть A — группа без кручения, и пусть $C = \bigoplus_{\mathfrak{n}} Z(p^\infty)$. Определить строение группы Hom (A, C). [*Указание*: в группе A взять p-базис.]

11. Используя упражнения 7—10, определить инварианты группы Hom (A, C) для алгебраически компактной группы C.

12 (Пирс [1]). Найти инварианты группы Hom (A, C) для произвольной p-группы A. [*Указание*: использовать теорему 46.4, упр. 8 и 9.]

§ 48*. Двойственность между дискретными периодическими и 0-мерными компактными группами

В этом параграфе мы продолжим изучение групп характеров абелевых групп, но теперь мы будем учитывать и топологию. На самом деле топология, определенная на группах характеров, играет очень существенную роль в удивительной двойственности между дискретными и компактными абелевыми группами.

Теория двойственности в общем случае локально компактных абелевых групп принадлежит Л. С. Понтрягину и ван Кампену и основывается на глубокой теореме, устанавливающей существование достаточного числа характеров для компактной группы. Более детальное исследование доказательства двойственности показывает, однако, что указанный результат не нужен, если ограничиться 0-мерными ком-

пактными группами и группами, двойственными им. Действительно, в этом случае для установления двойственности достаточно довольно простых топологических рассуждений. Наша цель — доказать двойственность в этом частном случае, т. е. двойственность между дискретными периодическими группами, с одной стороны, и вполне несвязными [т. е. 0-мерными] компактными группами — с другой. В этом параграфе все топологические группы предполагаются хаусдорфовыми.

Во избежание постоянного повторения обозначений условимся обозначать через K группу действительных чисел, рассматриваемых по модулю 1, т. е. группу вращений окружности, с обычной топологией, а через A^* — группу всех непрерывных гомоморфизмов топологической группы A в группу K, т. е. *группу характеров* группы A. В группе A^* введем *компактно-открытую топологию*, т. е. такую топологию, что фундаментальная система окрестностей нуля будет состоять из всех множеств вида

$$U(C, \varepsilon) = \{\chi \in A^* \mid \chi C \subset K_\varepsilon\},$$

где K_ε есть ε-окрестность нуля в K, а C — компактное подмножество группы A. При этом мы будем предполагать ε настолько малым, что K_ε не содержит ненулевых подгрупп группы K.

Начнем с некоторых лемм, которые мы будем формулировать и доказывать только применительно к нужному нам случаю, а не в полной общности. В доказательствах будем пользоваться известными результатами о топологических группах.

а) *Если A — дискретная периодическая группа, то A^* есть 0-мерная компактная группа.*

Функции f, определенные на группе A и принимающие значения в K, образуют группу K^A. Она компактна в топологии произведения, так как группа K компактна. Для фиксированных элементов $a, b \in A$ положим

$$H(a, b) = \{f \in K^A \mid f(a+b) = f(a) + f(b)\};$$

это замкнутое подмножество группы K^A [так как оно определено с помощью уравнения]. Очевидно, A^* является пересечением множеств $H(a, b)$, где a, b пробегают все элементы группы A. Следовательно, подгруппа A^* замкнута в K^A и потому компактна в индуцированной топологии. Доказательство компактности будет завершено, если мы покажем, что эта топология совпадает с компактно-открытой топологией на группе A^*. Так как группа A дискретна, компактность означает конечность: $C = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Если $V(C, \varepsilon)$ — окрестность нуля в K^A, где координаты в компонентах, соответствующих элементам из C, принадлежат K_ε, то $A^* \cap V(C, \varepsilon) = U(C, \varepsilon)$. Так как окрестности $V(C, \varepsilon)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в K^A, то отсюда получается компактность. Чтобы установить 0-мерность, заметим, что без органичения общности можно считать C подгруппой группы A, так как A — периодическая группа. Если ε выбрано таким,

как указывалось раньше, то условие $\chi C \subset K_\varepsilon$ приводит к $\chi C = 0$. Следовательно, $U(C, \varepsilon) = \operatorname{Ann} C$ — *аннулятор* группы C, который определяется так:

$$\operatorname{Ann} C = \{\chi \in A^* \mid \chi C = 0\}.$$

Таким образом, группа A^* обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, состоящей из подгрупп $U(C, \varepsilon)$. Эти подгруппы являются открытыми и замкнутыми, поэтому A^* есть 0-мерная группа.

б) *Если A — дискретная периодическая группа и $a \neq 0$ — элемент группы A, то существует такой характер χ группы A, что $\chi a \neq 0$.*

Если элемент $c \in K$ имеет порядок, равный порядку элемента a, то отображение $a \mapsto c$ можно продолжить до гомоморфизма $\langle a \rangle \to K$. Так как K — делимая группа, этот гомоморфизм продолжается до гомоморфизма $\chi\colon A \to K$.

в) *Если A — дискретная периодическая группа, а C — конечная подгруппа группы A, то*

$$C^* \cong A^*/\operatorname{Ann} C.$$

Так как K — делимая группа, то всякий характер группы C можно продолжить до характера группы A, т. е. отображение $A^* \to C^*$, индуцированное вложением $C \to A$, является эпиморфизмом. $\operatorname{Ann} C$ состоит из всех $\chi \in A^*$, которые индуцируют на C нулевой характер, т. е. $\operatorname{Ann} C$ — ядро гомоморфизма $A^* \to C^*$.

г) *Если G есть 0-мерная компактная группа, то топология в ней линейна.*

Пусть U — открыто-замкнутая окрестность нуля. Для любого $u \in U$ существует такая окрестность нуля W_u, что $u + W_u \subset U$, и существует такая окрестность нуля V_u, что $V_u + V_u \subset W_u$. Очевидно, окрестность U покрывается объединением $\bigcup_u (u + V_u)$, поэтому в силу компактности U существует такое конечное множество $\{u_1, \ldots, u_n\}$, что $\bigcup_{i=1}^{n} (u_i + V_{u_i})$ содержит U. Если $V = \bigcap_i V_{u_i}$, то

$$U + V \subseteq \bigcup_i (u_i + V_{u_i} + V) \subseteq \bigcup_i (u_i + W_{u_i}) \subseteq U.$$

Пусть W — окрестность нуля, для которой $W = -W \subseteq U \cap V$. Тогда также $W + W \subseteq U + V \subseteq U$ и в силу простой индукции $W + W + \ldots + W \subseteq U$. Это показывает, что $\langle W \rangle \subseteq U$. Так как $\langle W \rangle$ является объединением открытых множеств $W + \ldots + W$, то это открытая подгруппа, и утверждение доказано.

д) *Если G — группа, на которой введена линейная топология, то гомоморфизм γ: $G \to K$ непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро* $\operatorname{Ker} \gamma$ *является открытым.*

Если $\operatorname{Ker} \gamma$ — открытое множество, то $G/\operatorname{Ker} \gamma$ — дискретная группа, и гомоморфизм γ, очевидно, непрерывен. Обратно, если гомомор-

физм γ непрерывен, то $\gamma^{-1}K_\varepsilon$ — открытое миожество в G, поэтому существует такая открытая подгруппа H группы G, что $\operatorname{Ker}\gamma \supseteq H$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\gamma$ — открытое множество.

е) *Если G есть 0-мерная компактная группа, то G^* — дискретная периодическая группа.*

Если $\gamma \in G^*$, то из утверждений г) и д) видно, что $\operatorname{Ker}\gamma$ — открытое множество. Поэтому группа $G/\operatorname{Ker}\gamma$ дискретна. Она также компактна и, следовательно, конечна. Таким образом, $\operatorname{Im}\gamma$ — конечная подгруппа группы K, откуда $n\gamma = 0$ для некоторого целого числа $n > 0$. Это доказывает, что группа G^* периодическая. Далее, $U(G, \varepsilon) = 0$; следовательно, группа G^* дискретна.

ж) *Если G есть 0-мерная компактная группа и $g \neq 0$ — элемент группы G, то существует такой элемент $\gamma \in G^*$, что $\gamma g \neq 0$.*

По утверждению г) существует открытая подгруппа H группы G, не содержащая элемент g. Факторгруппа G/H дискретна и компактна, т. е. конечна. Остается применить б).

Утверждения б) и ж) выражают следующий факт: «группы A и G имеют достаточно много характеров». Это является важнейшим в теории двойственности.

Вторая группа характеров $A^{**} = (A^*)^*$ группы A содержит характеры a^{**} группы A^*, индуцированные элементами $a \in A$ следующим образом:

$$a^{**}(\chi) = \chi a \quad \text{для} \quad \chi \in A^*.$$

В силу определения сложения характеров a^{**} действительно является характером группы A^*, а каноническое отображение φ: $a \mapsto a^{**}$ группы A в группу A^{**}, очевидно, является гомоморфизмом.

з) *Если A — дискретная периодическая группа, то каноническое отображение φ: $A \to A^{**}$ является изоморфизмом.*

Докажем сначала, что φ — мономорфизм. Если $a^{**} = 0$, то $\chi a = 0$ для всех $\chi \in A^*$. В силу п. б) это может быть только при $a = 0$. Следовательно, φ — мономорфизм.

Если группа A конечна, то она является прямой суммой конечных циклических групп. Так как $Z(n)^* \cong Z(n)$, то получаем $A \cong A^*$. Повторное применение этого рассуждения дает $A \cong A^{**}$. Следовательно, для конечных групп A отображение φ — изоморфизм.

Если A — какая-то дискретная периодическая группа, то для характера γ: $A^* \to K$ ядро $\operatorname{Ker}\gamma$ должно быть открытым в силу пп. а), г) и д). Следовательно, существует такая конечная подгруппа C группы A, что $\operatorname{Ann} C \subseteq \operatorname{Ker}\gamma$ [см. доказательство утверждения а)]. Характер γ индуцирует характер $\bar{\gamma}$ группы $A^*/\operatorname{Ann} C \cong C^*$ [см. в)]. Так как группа C^* конечна, то из уже доказанного мы знаем, что $\bar{\gamma}$ индуцируется некоторым элементом $c \in C$, т. е. $\bar{\gamma}(\bar{\chi}) = \bar{\chi} c$ для всех $\bar{\chi} \in C^*$. Теперь легко проверить, что $\gamma(\chi) = \chi c$ для всех $\chi \in A^*$, откуда следует, что γ имеет вид $\gamma = c^{**}$. Следовательно, φ — эпиморфизм, т. е. изоморфизм.

и) *Если G есть 0-мерная компактная группа, то каноническое отображение* ψ: $G \to G^{**}$ *является топологическим изоморфизмом.*

Тот факт, что ψ — мономорфизм, получается так же, как в п. з), нужно только сослаться не на утверждение б), а на ж). Чтобы доказать, что ψ — непрерывное отображение, покажем, что если U — фундаментальная окрестность нуля в G^{**}, то ψ отображает некоторую открытую подгруппу V группы G в U. По п. е) группа G^* является дискретной и периодической, поэтому в силу доказательства пункта а) можно написать $U = \operatorname{Ann} C$ для некоторой конечной подгруппы $C = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ группы G^*. Положим $V = \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} \gamma_j$. По г) и д) ядро $\operatorname{Ker} \gamma_j$ является открытым. Тем же свойством обладает V. Теперь для элемента $g \in V$ мы получаем $g^{**}(\gamma_j) = \gamma_j g = 0$, $j = 1, \ldots, n$, т. е. $g^{**} \in \operatorname{Ann} C$. Этим доказано, что ψ отображает V в U, т. е. ψ — непрерывное отображение. Следовательно, ψ — топологический изоморфизм компактных групп G и ψG.

Так как ψG — компактная группа, она замкнута в группе G^{**}. Теперь $G^{**}/\psi G$ — снова 0-мерная компактная группа. Если она не нулевая, то, применяя утверждение ж), получим, что существует ненулевой характер $\bar{\tau}$: $G^{**}/\psi G \to K$. Он индуцируется таким характером τ: $G^{**} \to K$, что $\tau\psi G = 0$. Как было показано в дискретном случае з), существует такое χ: $G^* \to K$, что $\tau = \chi^{**}$, т. е., другими словами, $\tau(\gamma) = \gamma(\chi)$ для всех $\gamma \in G^{**}$. Возьмем $\gamma = g^{**}$ (где $g \in G$). Тогда получится $\chi g = g^{**}(\chi) = \tau(g^{**}) = 0$. Отсюда $\chi = 0$ и $\tau = 0$, что противоречит тому, что $\bar{\tau} \neq 0$. Следовательно, $\psi G = G^{**}$.

В итоге мы получаем:

Теорема 48.1 (Понтрягин [1]). *Пусть A — дискретная периодическая [0-мерная компактная] группа. Тогда группа A^* ее непрерывных характеров является 0-мерной компактной [дискретной периодической] группой, а отображение $a \mapsto a^{**}$ группы A во вторую группу характеров A^{**} — топологический изоморфизм.* ∎

Упражнения

1. Теорема 48.1 останется справедливой, если под характерами понимать гомоморфные отображения в дискретную группу Q/Z.

2. Пусть A_i $(i \in I)$ — дискретные периодические группы, и пусть на группе $\oplus A_i$ определена дискретная топология. Тогда группа $(\oplus A_i)^*$ топологически изоморфна группе $\prod A_i^*$ с определенной на ней топологией произведения.

3. Если G — компактная топологическая группа и H — ее замкнутая подгруппа, то

$$(G/H)^* \cong \operatorname{Ann} H.$$

4. Пусть G есть 0-мерная компактная группа.

(а) Z-адическая топология на группе G тоньше, чем заданная топология.

(б) Для любого натурального числа n подгруппы nG и $G[n]$ замкнуты.

5. Группа A компактна в своей Z-адической топологии тогда и только тогда, когда она полна в Z-адической топологии, а факторгруппа A/pA конечна при любом простом p.

6. Если группа линейно компактна в своей Z-адической топологии, то она компактна в этой топологии. [*Указание*: см. упр. 5.]

7. Группа A локально компактна в Z-адической топологии тогда и только тогда, когда для некоторого $n > 0$ группа nA компактна в Z-адической топологии.

8. Если группа A дискретна или компактна, то

$$\operatorname{Ann} nA \cong A^*[n] \quad \text{и} \quad \operatorname{Ann} A[n] \cong nA^*.$$

9. Для любой компактной топологической группы C группа $\operatorname{Hom}(A, C)$ может быть превращена в компактную топологическую группу.

Замечания

Давно было известно, что гомоморфизмы одной абелевой группы в другую образуют группу. Важность функтора Hom была установлена Эйленбергом и Маклейном [1]; Hom как основной функтор широко изучался Картаном и Эйленбергом [1].

Идея получить в теореме 44.4 больше, чем точность последовательностей (2) и (3), когда от последовательности (1) требуется не только точность, видимо, впервые появилась в работах автора (Фукс [8] и [9]). Различные другие обобщения теорем 44.4 и 51.3 были даны Харрисоном и др. [1], Ирвином и др. [1], Пирсом [1] и некоторыми другими авторами.

Алгебраическое строение группы Hom было известно в некоторых частных случаях. Основные результаты здесь были получены Пирсом [1], который нашел инварианты группы $\operatorname{Hom}(A, C)$ как алгебраически компактной группы для случая периодической группы A. Для группы Char A то же было сделано ранее автором (Фукс [8]); это несколько улучшило алгебраическое описание компактных групп, полученное Хуляницким [1], [2] и Харрисоном [1]. [Прекрасное изложение теории компактных и локально компактных абелевых групп можно найти в книге Хьюитта и Росса [Hewitt E. and Ross K. A., Abstract Harmonic Analysis, vol. 1], где читатель найдет также дополнительные сведения о двойственности.] Замечательная двойственность между дискретными и линейно компактными p-адическими модулями была обнаружена Капланским [Kaplansky I., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 (1953), 213—219] и Шёнеборном [Schöneborn H., *Math. Z.*, **59** (1954), 455—473, и **60** (1954), 17—30]. Оказывается, что всякая линейно компактная абелева группа естественным образом является модулем над p-адическим пополнением кольца целых чисел [это кольцо есть прямое произведение колец целых p-адических чисел, по одному для каждого простого числа p]. Строение линейно компактных абелевых групп может быть полностью описано. Эти группы образуют класс, лежащий между алгебраически компактными и компактными группами (см. Фукс [13]).

Проблема 30. Описать группу $\operatorname{Hom}(A, C)$, в частности в случае, когда C — группа без кручения [ранга 1 или являющаяся прямой суммой групп ранга 1].

Группы без кручения ранга 1 описываются в главе XIII.

Проблема 31. Найти условия на группу, при которых она имеет вид End A для некоторой группы A. Сколько среди этих групп A может быть неизоморфных?

Заметим, что для периодических групп A теорема 46.4 дает решение проблемы.

Проблема 32. Имеет ли группа Hom (A, C), где A — периодическая группа, «естественную» компактную топологию?

Проблема 33. Какие классы абелевых групп A [подклассы класса алгебраически компактных или копериодических групп] замкнуты относительно соответствий $A \to \text{Hom}\,(G, A)$, где группа G может быть произвольной?

Проблема 34[1]. Существует ли такое множество $\mathfrak{X}$ групп X, что из $\text{Hom}\,(A, X) \cong \text{Hom}\,(B, X)$ для любого $X \in \mathfrak{X}$ вытекает, что $A \cong B$?

Проблема 35. Для каких категорий $(\mathscr{A}, \mathbf{I})$ и $(\mathscr{A}, \mathbf{D})$ группы $\text{Hom}\,(A, C \mid \mathbf{I})$ и $\text{Hom}\,(A \mid \mathbf{D}, C)$ всегда алгебраически компактны, когда A — периодическая группа?

Проблема 36. Исследовать множества эндоморфизмов группы Hom (A, C), индуцированных соответственно эндоморфизмами групп A и C [общие элементы, централизаторы и т. д.].

Проблема 37. Можно ли для любого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$ найти $2^{\mathfrak{m}}$ неизоморфных компактных связных групп мощности $\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$ [алгебраически изоморфных между собой]?

[1]) Эту проблему отрицательно решил П. Хилл [Hill P., *J. Algebra*, 19 (1971), № 3, 379—383]. — *Прим. перев.*

Глава IX

ГРУППЫ РАСШИРЕНИЙ

Проблема расширения для абелевых групп [как частный случай общей теоретико-групповой проблемы, сформулированной Шрейером] состоит в нахождении группы по ее подгруппе и соответствующей факторгруппе. Классический способ изучения расширений состоит в рассмотрении систем факторов. Важным открытием, сделанным Бэром, было то, что расширения [при соответствующем отношении эквивалентности] сами образуют группу: группу расширений Ext. Основное содержание настоящей главы — изучение этой группы.

Эйленберг и Маклейн [1] отметили тесную связь между группами расширений и группами гомоморфизмов. Это привело к интерпретации Ext как так называемого производного функтора от Hom и широко использовалось Картаном и Эйленбергом [1]. Ext можно изучать различными путями; мы остановимся на элегантном методе Маклейна [3].

Наша основная задача — установить теоретико-групповые свойства группы Ext (C, A), ее зависимость от групп A и C и ее связь с известными конструкциями. Некоторые из интересующих нас проблем нельзя решить имеющимися у нас методами, но мы можем получить достаточно большую информацию, касающуюся общего случая и позволяющую решить проблему в большом числе частных случаев. Точные последовательности, связывающие Hom и Ext, их обобщения и теория копериодических групп — вот главное, о чем будет идти речь в этой главе.

§ 49. Расширения групп

Если даны группы A и C, то *проблема расширения* состоит в нахождении таких групп B, что B содержит подгруппу A', изоморфную группе A, причем $B/A' \cong C$. Это может быть записано с помощью короткой точной последовательности

$$E\colon\ 0 \to A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu} C \to 0,$$

где μ — вложение, ν — эпиморфизм с ядром μA. В этом случае говорят, что группа B является *расширением группы A при помощи группы C*. Наша ближайшая задача — описать все расширения группы A при помощи группы C. Это можно сделать различными путями. В данном параграфе мы будем описывать расширения, используя системы факторов, в следующем — с помощью коротких точных последовательностей.

Будем обозначать через $a, b, \ldots$ элементы группы A, через $u, v, w, \ldots$ — элементы группы C. Пусть $g\colon C \to B$ — *функция представителей*; это значит, что $g(u)$ — представитель смежного класса u, т. е. $g(u) \in \nu^{-1}u$. Каждый элемент $b \in B$ можно единственным образом записать в виде $b = g(u) + \mu a$, где $a \in A$. Очевидно, элементы

$g(u)+g(v)$ и $g(u+v)$ принадлежат одному и тому же смежному классу по подгруппе μA, поэтому существует такое $f(u, v) \in A$, что

$$g(u)+g(v)=g(u+v)+\mu f(u, v). \tag{1}$$

Таким образом, мы имеем функцию

$$f\colon C \times C \to A, \tag{2}$$

однозначно определенную расширением B и выбором представителей $g(u)$. Из законов коммутативности и ассоциативности в группе B вытекают тождества

$$f(u, v)=f(v, u), \tag{3}$$

$$f(u, v)+f(u+v, w)=f(u, v+w)+f(v, w) \tag{4}$$

для любых $u, v, w \in C$. Если выбрать $g(0)=0$, то дополнительно будем иметь

$$f(u, 0)=f(0, v)=0 \tag{5}$$

для всех $u, v \in C$. Функция (2), удовлетворяющая условиям (3) — (5), называется *системой факторов* [из группы C в группу A].

Предположим, наоборот, что даны две группы A и C и дана система факторов (2). Тогда мы можем построить группу B как множество всех пар $(u, a) \in C \times A$ с операцией $(u, a)+(v, b)=(u+v, a+b+ f(u, v))$. В самом деле, законы коммутативности и ассоциативности будут следовать из (3) и (4), пара $(0, 0)$ будет играть роль нуля, пара $(-u, -a-f(-u, u))$ — роль противоположного элемента для пары (u, a) в B. Ясно, что при $\mu\colon a \mapsto (0, a)$, $\nu\colon (u, a) \mapsto u$ последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu} C \to 0$$

точна, поэтому группа B является расширением группы A при помощи группы C. Выбор представителей $g(u)=(u, 0)$ приводит к заданной системе факторов f. Следовательно, *проблема расширения может быть решена, если найти все системы факторов.*

Одним из расширений группы A при помощи группы C является прямая сумма $C \oplus A$. Мы ее будем также называть *расщепляющимся расширением*. Если выбрать $g(u)=u \in C$, то f будет тождественным нулем. Другой выбор представителей, например $g(u)=u+\mu h(u)$, где $h(u) \in A$, даст систему факторов

$$f(u, v)=h(u)+h(v)-h(u+v). \tag{6}$$

Обратно, если $h\colon C \to A$ — любая функция, для которой $h(0)=0$, то (6) — такая система факторов, что пары $(u, -h(u))$ образуют дополнение к μA в группе B, т. е. расширение расщепляется. Таким образом, расширение группы A при помощи группы C расщепляется в точности тогда, когда оно определено с помощью системы факторов f вида (6) [где, подчеркиваем, $h\colon C \to A$]; такая система факторов f называется *системой трансформаций*.

Можно освободиться от зависимости расширения от заданной функции g: $C \to B$, если в множестве расширений ввести следующее отношение эквивалентности. Если g_1 и g_2 — функции представителей $C \to B$, то, очевидно, $g_1(u) - g_2(u) = \mu h(u)$ для некоторой функции h: $C \to A$. Соответствующие системы факторов f_1, f_2 удовлетворяют условию

$$f_1(u, v) - f_2(u, v) = h(u) + h(v) - h(u + v). \tag{7}$$

В соответствии с этим назовем системы факторов f_1, f_2: $C \times C \to A$ *эквивалентными*, если для некоторого h: $C \to A$ имеет место (7). Расширения B_1, B_2 группы A при помощи группы C, соответствующие эквивалентным системам факторов f_1, f_2, изоморфны; изоморфизм β: $(u, a)_1 \mapsto (u, a + h(u))_2$ между ними превращает диаграмму

$$\begin{array}{rccccccccc} E_1\colon & 0 & \to & A & \xrightarrow{\mu} & B_1 & \xrightarrow{\nu} & C & \to & 0 \\ & & & \Vert & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \Vert & & \\ E_2\colon & 0 & \to & A & \xrightarrow{\mu} & B_2 & \xrightarrow{\nu} & C & \to & 0 \end{array} \tag{8}$$

в коммутативную. В этом случае сами расширения E_1 и E_2 называются *эквивалентными*. Если диаграмма (8) коммутативна и g_1: $C \to B_1$ — функция представителей, то $g_2 = \beta g_1$: $C \to B_2$ — тоже функция представителей, а соответствующие системы факторов эквивалентны. Поэтому *существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных расширений группы A при помощи группы C и классами эквивалентных систем факторов f: $C \times C \to A$*. В частности, расширение эквивалентно расщепляющемуся расширению тогда и только тогда, когда соответствующий ему класс эквивалентных систем факторов есть класс систем трансформаций.

Если f_1, f_2: $C \times C \to A$ — системы факторов, то их сумма $f_1 + f_2$, определяемая равенством

$$(f_1 + f_2)(u, v) = f_1(u, v) + f_2(u, v),$$

снова является системой факторов, и то же верно для $-f_1$. Следовательно, системы факторов из группы C в группу A образуют группу $\mathrm{Fact}(C, A)$. Системы трансформаций, очевидно, образуют подгруппу $\mathrm{Trans}(C, A)$ этой группы. Из сказанного выше следует, что существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных расширений группы A при помощи группы C и элементами факторгруппы $\mathrm{Fact}(C, A)/\mathrm{Trans}(C, A)$. Эта факторгруппа называется *группой расширений группы A при помощи группы C*:

$$\mathrm{Ext}(C, A) = \mathrm{Fact}(C, A)/\mathrm{Trans}(C, A).$$

Другой метод изложения теории расширений основывается на том, что расширение описывается с помощью группы A и некоторого представления группы C. Этот метод будет изложен в общих чертах в конце § 51.

Упражнения

1. Если рассматривать Hom (C, A) как подгруппу группы $A^{C'}$, где $C' = C \setminus 0$ [см. § 43], то

$$A^{C'}/\mathrm{Hom}\,(C, A) \cong \mathrm{Trans}\,(C, A).$$

2. Система факторов из любой группы в делимую группу является системой трансформаций. [*Указание*: см. теорему 22.1.]

3. Если A/B — делимая группа, то всякая система факторов из группы C в группу A эквивалентна системе факторов из группы C в подгруппу B группы A.

4. Если $A \cong C \cong Z(p)$, то имеется два неизоморфных и [не менее] p не эквивалентных расширений группы A при помощи группы C.

§ 50. Расширения как короткие точные последовательности

В предыдущем параграфе для описания расширений группы A при помощи группы C мы использовали метод систем факторов. Другой подход к этому вопросу основывается на использовании коротких точных последовательностей. Как мы увидим, этот принципиально новый подход приведет к получению большого числа полезных соотношений.

Если расширение B группы A при помощи группы C представлено в виде точной последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu} C \to 0,$$

то можно попытаться построить категорию, объектами которой будут короткие точные последовательности. Соответствующее определение морфизма между двумя точными последовательностями довольно очевидно: это тройка (α, β, γ) групповых гомоморфизмов, для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} E\colon & 0 \to & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\nu} & C & \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & \\ E'\colon & 0 \to & A' & \xrightarrow{\mu'} & B' & \xrightarrow{\nu'} & C' & \to 0 \end{array} \qquad (1)$$

имеет коммутативные квадраты. Легко показать, что таким путем действительно получается категория $\mathscr{E}$.

В соответствии с данным выше определением эквивалентных расширений мы скажем, что расширения E и E', где $A = A'$, $C = C'$, *эквивалентны* [обозначается $E \equiv E'$], если существует морфизм $(1_A, \beta, 1_C)$, где $\beta\colon B \to B'$ — изоморфизм. На самом деле требование, чтобы β было изоморфизмом, может быть отброшено, так как это следует уже из леммы 2.3.

Сначала мы будем изучать расширения, где группа A фиксирована. Если γ: $C' \to C$ — произвольный гомоморфизм, то для расширения E в (1) по теореме 10.1 существует коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & B' & \xrightarrow{\nu'} & C' & & \\ & & & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\nu} & C & \to & 0 \end{array}$$

с соответствующими B', β и ν'. Из п. (а) § 10 мы знаем, что ν' — эпиморфизм [так как ν — эпиморфизм], а равенства (3) из § 10 показывают, что $\operatorname{Ker}\nu' \cong \operatorname{Ker}\nu \cong A$. Поэтому существует мономорфизм μ': $A \to B'$ [именно, $\mu' a = (\mu a, 0) \in B'$, если $B' \subseteq B \oplus C'$], для которого диаграмма

$$\begin{array}{lccccccccc} E\gamma: & 0 & \to & A & \xrightarrow{\mu'} & B' & \xleftarrow{\nu'} & C' & \to & 0 \\ & & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ E: & 0 & \to & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\nu} & C & \to & 0 \end{array}$$

с точными строками и коуниверсальным правым квадратом коммутативна. Верхняя строка является расширением группы A при помощи группы C', которое мы обозначили через $E\gamma$, чтобы отметить, что оно получено с помощью расширения E и гомоморфизма γ. Заметим, что $\gamma^* = (1_A, \beta, \gamma)$ — морфизм $E\gamma \to E$ категории $\mathscr{E}$.

Если диаграмма

$$\begin{array}{lccccccccc} E^\circ: & 0 & \to & A & \xrightarrow{\mu^\circ} & B^\circ & \xrightarrow{\nu^\circ} & C' & \to & 0 \\ & & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\beta^\circ} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ E: & 0 & \to & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\nu} & C & \to & 0 \end{array}$$

имеет точные строки и коммутативна, то по теореме 10.1 существует такой однозначно определенный гомоморфизм φ: $B^\circ \to B'$, что $\nu'\varphi = \nu^\circ$ и $\beta\varphi = \beta^\circ$. Так как отображения $\varphi\mu^\circ$, μ': $A \to B'$ таковы, что $\beta(\varphi\mu^\circ) = \beta^\circ\mu^\circ = \mu = \beta\mu'$ и $\nu'(\varphi\mu^\circ) = \nu^\circ\mu^\circ = 0 = \nu'\mu'$, то из единственности, полученной в теореме 10.1, вытекает, что $\varphi\mu^\circ = \mu'$. Следовательно, $(1_A, \varphi, 1_{C'})$ — морфизм расширения E° в расширение $E\gamma$ и, таким образом, $E^\circ \equiv E\gamma$. Это означает, что $E\gamma$ определено однозначно с точностью до эквивалентности, а это, в свою очередь, дает эквивалентности

$$E1_C \equiv E \quad \text{и} \quad E(\gamma\gamma') \equiv (E\gamma)\gamma'$$

для $C'' \xrightarrow{\gamma'} C' \xrightarrow{\gamma} C$. Отсюда ясна контравариантность функтора E по C.

Зафиксируем теперь группу C и будем менять группу A. Для гомоморфизма α: $A \to A'$ пусть B' определяется универсальным квад-

ратом

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\nu} & C \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \\ & A' & \xrightarrow{\mu'} & B' & & \end{array}$$

Здесь μ' — мономорфизм, так как μ — мономорфизм [см. п. (б) § 10]. Кроме того, если рассматривать группу B' как факторгруппу группы $A' \oplus B$ [как в доказательстве теоремы 10.2], то при $\nu'((a', b) + H) = \nu b$ диаграмма

$$\begin{array}{rccccccc} E\colon & 0 \to & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\nu} & C \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \| \\ \alpha E\colon & 0 \to & A' & \xrightarrow{\mu'} & B' & \xrightarrow{\nu'} & C \to 0 \end{array}$$

с точными строками будет коммутативной. Нижняя строка здесь — расширение группы A' при помощи группы C, которое мы обозначаем через αE. При этом $\alpha_* = (\alpha, \beta, 1_C)$ — морфизм $E \to \alpha E$ категории $\mathscr{E}$.

Если

$$\begin{array}{rccccccc} E\colon & 0 \to & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\nu} & C \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_0} & & \| \\ E_0\colon & 0 \to & A' & \xrightarrow{\mu_0} & B_0 & \xrightarrow{\nu_0} & C \to 0 \end{array}$$

— коммутативная диаграмма с точными строками, то в силу теоремы 10.2 существует такой однозначно определенный гомоморфизм $\varphi\colon B' \to B_0$, что $\varphi\beta = \beta_0$ и $\varphi\mu' = \mu_0$. Из $(\nu_0\varphi)\,\beta = \nu_0\beta_0 = \nu = \nu'\beta$ и $(\nu_0\varphi)\,\mu' = 0 = \nu'\mu'$ получаем, что $\nu_0\varphi = \nu'$. Следовательно, $(1_{A'}, \varphi, 1_C)$ — это морфизм $\alpha E \to E_0$, и $\alpha E \equiv E_0$, т. е. расширение αE определено однозначно с точностью до эквивалентности. Отсюда

$$1_A E \equiv E \quad \text{и} \quad (\alpha\alpha')\,E \equiv \alpha\,(\alpha' E)$$

для $A \xrightarrow{\alpha} A' \xrightarrow{\alpha'} A''$. Это доказывает ковариантность зависимости E от A.

Если даны $\alpha\colon A \to A'$ и $\gamma\colon C' \to C$, то имеет место важный закон ассоциативности

$$\alpha\,(E\gamma) \equiv (\alpha E)\,\gamma. \tag{2}$$

В самом деле, используя свойство коуниверсальности расширения $(\alpha E)\,\gamma$, легко доказать существование морфизма $(\alpha, \beta', 1)\colon E\gamma \to$

$\to (\alpha E)\,\gamma$ и показать, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} E\gamma & \xrightarrow{(1,\,\beta_1,\,\gamma)} & E \\ \Big\downarrow{\scriptstyle(\alpha,\,\beta',\,1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle(\alpha,\,\beta_2,\,1)} \\ (\alpha E)\,\gamma & \xrightarrow{(1,\,\beta,\,\gamma)} & \alpha E \end{array}$$

коммутативен.

Прервем на минуту наше изложение и покажем, что расширения $E\gamma$ и αE легко могут быть описаны с помощью систем факторов, если расширение E задано системой факторов $f\colon C \times C \to A$. В силу определения расширения $E\gamma$ при помощи коуниверсального квадрата системой факторов, соответствующей этому расширению, является композиция функций

$$C' \times C' \xrightarrow{\gamma\times\gamma} C \times C \xrightarrow{f} A.$$

Это непосредственно следует из того, что $B \oplus C'$ — расширение группы A при помощи группы $C \oplus C'$, задаваемое системой факторов $f(c_1 + c_1', c_2 + c_2') = f(c_1, c_2)$ $(c_i \in C,\ c_i' \in C')$, а ограничение на B' означает, что $c_1 = \gamma c_1'$, $c_2 = \gamma c_2'$, т. е. система факторов — это $f(\gamma c_1', \gamma c_2')$. Аналогично системой факторов, задающей расширение αE, служит композиция функций

$$C \times C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\alpha} A'.$$

В самом деле, в точной последовательности αE группа B' — это факторгруппа расширения $A' \oplus B$ группы $A' \oplus A$ при помощи группы C, задаваемого системой факторов $f(c_1, c_2)$, рассматриваемой как отображение $C \times C \to A' \oplus A$. Переходя к факторгруппе и используя свойство универсальности, получаем, что B' как расширение группы A' при помощи группы C задается системой факторов $\alpha f(c_1, c_2)$.

Возвращаясь к коротким точным последовательностям, предположим, что даны два расширения E_1 и E_2 группы A при помощи группы C. Как было показано в предыдущем параграфе, расширения группы A при помощи группы C [точнее, классы эквивалентных расширений] образуют группу.

Чтобы описать групповую операцию на языке коротких точных последовательностей, мы воспользуемся диагональным отображением $\Delta_G\colon g \mapsto (g, g)$ и кодиагональным отображением $\nabla_G\colon (g_1, g_2) \mapsto g_1 + g_2$ группы G. Если под *прямой суммой* двух расширений

$$E_i\colon\ 0 \to A_i \xrightarrow{\mu_i} B_i \xrightarrow{\nu_i} C_i \to 0 \qquad (i = 1,\ 2)$$

понимать расширение

$$E_1 \oplus E_2\colon\ 0 \to A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\mu_1\oplus\mu_2} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{\nu_1\oplus\nu_2} C_1 \oplus C_2 \to 0,$$

то будет иметь место

Предложение 50.1 (Маклейн [3]). *Суммой двух расширений E_1, E_2 группы A при помощи группы C служит расширение*

$$E_1 + E_2 = \nabla_A (E_1 \oplus E_2) \Delta_C. \qquad (3)$$

Нужно проверить, что если f_i: $C \times C \to A$ — система факторов, задающая расширение E_i ($i = 1, 2$), то $f_1 + f_2$ задает расширение $\nabla_A (E_1 \oplus E_2) \Delta_C$. Ясно, что $(f_1 (c_1, c_2), f_2 (c_1', c_2'))$, где $c_i, c_i' \in C$,— система факторов, задающая прямую сумму $E_1 \oplus E_2$, а $(f_1 (c_1, c_2), f_2 (c_1, c_2))$ — система факторов, задающая $(E_1 \oplus E_2) \Delta_C$. Применение ∇_A дает систему факторов $f_1 (c_1, c_2) + f_2 (c_1, c_2)$. ∎

Конечно, можно обойтись без всяких ссылок на системы факторов и вести изложение только на языке коротких точных последовательностей. Если делать так, то (3) будет служить определеннем суммы расширений, а предложение 50.1 нужно будет заменить утверждением, что $E_1 + E_2$ на самом деле является расширеннем группы A прн помощи группы C, остающимся в том же классе эквивалентных расширений, когда E_1 и E_2 заменяются эквивалеитными расширениями, и что классы эквнвалентных расширений образуют группу относительно этой операцин. [Доказательство этого факта, не использующее систем факторов, см. в кииге Маклейна [3].]

Из сказанного выше о системах факторов, определяющих расширения $E\gamma$ и αE, теперь ясно, что для гомоморфизмов α: $A \to A'$ и γ: $C' \to C$ и расширений E_1, E_2, E группы A при помощи группы C имеют место следующие эквивалентности:

$$\alpha (E_1 + E_2) \equiv \alpha E_1 + \alpha E_2, \qquad (E_1 + E_2) \gamma \equiv E_1\gamma + E_2\gamma, \qquad (4)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) E \equiv \alpha_1 E + \alpha_2 E, \qquad E (\gamma_1 + \gamma_2) \equiv E\gamma_1 + E\gamma_2. \qquad (5)$$

Эквивалентности (4) выражают тот факт, что α_*: $E \mapsto \alpha E$ и γ^*: $E \mapsto E\gamma$ — это групповые гомоморфизмы

$$\alpha_*\colon \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C, A'), \quad \gamma^*\colon \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C', A),$$

а в (5) утверждается, что $(\alpha_1 + \alpha_2)_* = (\alpha_1)_* + (\alpha_2)_*$ и $(\gamma_1 + \gamma_2)^* = \gamma_1^* + \gamma_2^*$, т. е. соответствие

$$\operatorname{Ext}\colon C \times A \mapsto \operatorname{Ext}(C, A), \quad \gamma \times \alpha \mapsto \gamma^*\alpha_* = \alpha_*\gamma^*$$

есть аддитивный бифунктор из категории $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{A}$ [последнее равенство — это другая форма соотношения (2)].

Теорема 50.2 (Эйленберг и Маклейн [1]). Ext *является аддитивным бифунктором из категории* $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *в категорию* $\mathcal{A}$, *контравариантным по первому и ковариантным по второму аргументу.* ∎

В соответствии с функторным обозначением для гомоморфизмов мы будем также использовать обозначение

$$\operatorname{Ext}(\gamma, \alpha)\colon \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C', A')$$

вместо $\gamma^* \alpha_* = \alpha_*\gamma^*$. Это значит, что $\operatorname{Ext}(\gamma, \alpha)$ действует так:

$$\operatorname{Ext}(\gamma, \alpha)\colon E \mapsto \alpha E\gamma.$$

Следует помнить, что если E — расширение из диаграммы (1), то при $\gamma\colon C' \to C$ расширение $E\gamma$ представляется последовательностью $0 \to A \xrightarrow{\mu'} B' \xrightarrow{\nu'} C' \to 0$, где

$$B' = \{(b, c') \mid b \in B,\ c' \in C',\ \nu b = \gamma c'\},$$
$$\mu' a = (\mu a, 0), \quad \nu'(b, c') = c', \tag{6}$$

и при $\alpha\colon A \to A'$ расширение αE представляется последовательностью $0 \to A' \xrightarrow{\mu'} B' \xrightarrow{\nu'} C \to 0$, где

$$B' = \{(a', b) + H \mid a' \in A',\ b \in B\},$$
$$\mu' a' = (a', 0) + H, \quad \nu'((a', b) + H) = \nu b \tag{7}$$

и $H = \{(\alpha a, -\mu a) \mid a \in A\}$. Эти формулы для $E\gamma$ и αE нам в дальнейшем понадобятся.

Упражнения

1. Охарактеризовать мономорфизмы и эпиморфизмы категории $\mathscr{E}$ [т. е. морфизмы, на которые можно сокращать соответственно слева и справа].

2 (Маклейн [3]). Если E — расширение из диаграммы (1), то расширения μE и $E\nu$ расщепляются.

3 (Маклейн [3]). Если $(\alpha, \beta, \gamma)\colon E \to E'$ — морфизм в категории $\mathscr{E}$, то $\alpha E \equiv E'\gamma$.

4. (а) Если $\alpha\colon A \to A'$ — эпиморфизм, то расширение αE [где E взято из диаграммы (1)] эквивалентно расширению

$$0 \to A/\operatorname{Ker}\alpha \to B/\mu \operatorname{Ker}\alpha \to C \to 0,$$

где отображения определены очевидным образом.

(б) Если $\gamma\colon C' \to C$ — мономорфизм, то расширение $E\gamma$ эквивалентно расширению

$$0 \to A \to \nu^{-1} \operatorname{Im}\gamma \to \operatorname{Im}\gamma \to 0.$$

5. Пусть α [соответственно γ] — автоморфизм группы A [группы C]. Когда расширение αE [расширение $E\gamma$] эквивалентно расширению E из диаграммы (1)?

§ 51. Точные последовательности для функтора Ext

Как мы видели в предыдущем параграфе, Ext является функтором от обоих своих аргументов. Основным результатом настоящего параграфа является то, что этот функтор точен справа. Кроме того, точные последовательности для Hom и Ext можно соединять в длинные точные последовательности.

Если дано расширение

$$E\colon 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0, \tag{1}$$

представляющее элемент группы $\mathrm{Ext}(C, A)$, и дан гомоморфизм $\eta: A \to G$, то, как мы знаем из предыдущего параграфа, ηE является расширением группы G при помощи группы C, т. е. ηE представляет элемент группы $\mathrm{Ext}(C, G)$. Этим путем мы получаем отображение

$$E^*: \mathrm{Hom}(A, G) \to \mathrm{Ext}(C, G),$$

где

$$E^*: \eta \mapsto \eta E.$$

Аналогично гомоморфизм $\xi: G \to C$ позволяет из расширения E получить расширение $E\xi$ группы A при помощи группы G. Это дает отображение

$$E_*: \mathrm{Hom}(G, C) \to \mathrm{Ext}(G, A),$$

где

$$E_*: \xi \mapsto E\xi.$$

Из соотношений (5) § 50 непосредственно вытекает, что E^* и E_* — гомоморфизмы. Они являются естественными, так как если $\varphi: G \to H$ — какой-то гомоморфизм, то из $(\varphi\eta) E \equiv \varphi (\eta E)$ и $E (\xi\varphi) \equiv (E\xi) \varphi$ следует, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A, G) & \to & \mathrm{Ext}(C, G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(A, H) & \to & \mathrm{Ext}(C, H) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(H, C) & \to & \mathrm{Ext}(H, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(G, C) & \to & \mathrm{Ext}(G, A), \end{array}$$

где отображения определены очевидным образом, коммутативны. Гомоморфизмы E^* и E_* называются *связывающими гомоморфизмами* для короткой точной последовательности (1). Теорема 51.3 оправдывает это название.

Сначала докажем две леммы технического характера.

Лемма 51.1 (Маклейн [3]). *Если*

$$\begin{array}{l} E: 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \\ \qquad\quad \downarrow \eta \quad \swarrow \xi \\ \qquad\quad G \end{array}$$

— диаграмма с точной строкой, то гомоморфизм $\xi: B \to G$, для которого треугольник коммутативен, существует тогда и только тогда, когда расширение ηE расщепляется.

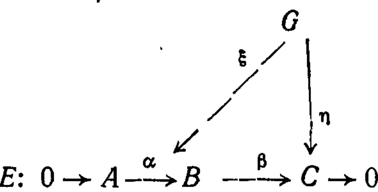
Если нужный гомоморфизм ξ существует, то диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} E: 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow \eta & & \downarrow (\xi\oplus\beta)\Delta & & \| & & \\ 0 & \to & G & \xrightarrow{(1_G\oplus 0)\Delta} & G\oplus C & \xrightarrow{\nabla(0\oplus 1_C)} & C & \to & 0 \end{array}$$

коммутативна. Следовательно, ее нижняя строка эквивалентна расширению ηE. Обратно, если расширение ηE: $0 \to G \to B' \to C \to 0$ расщепляется, то последовательное выполнение отображения $B \to B'$ и проекции $B' \to G$ дает отображение ξ с нужным свойством. ∎

Рассуждения, двойственные проведенным, дают результат, в точности двойственный предыдущей лемме:

Лемма 51.2. *Если диаграмма*



$$E:\ 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

имеет точную строку, то такой гомоморфизм ξ: $G \to B$, *что* $\beta\xi = \eta$, *существует тогда и только тогда, когда расширение* $E\eta$ *расщепляется.* ∎

Используя эти леммы, следующую теорему о точных последовательностях для Ext можно доказать с помощью непосредственного, хотя и немного запутанного счета.

Теорема 51.3 (Картан и Эйленберг [1]). *Если* (1) — *точная последовательность, то последовательности*

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G) \to$$
$$\xrightarrow{E^*} \mathrm{Ext}(C, G) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Ext}(B, G) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Ext}(A, G) \to 0 \qquad (2)$$

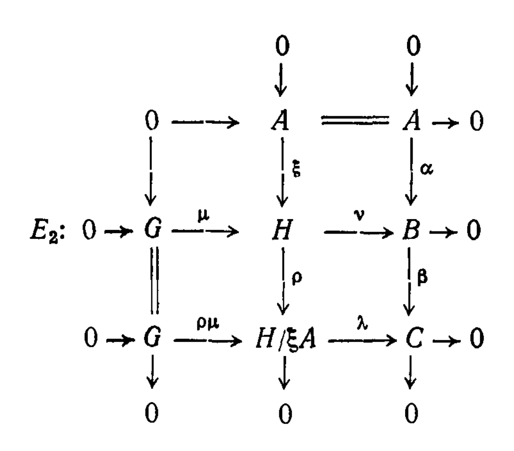
и

$$0 \to \mathrm{Hom}(G, A) \to \mathrm{Hom}(G, B) \to \mathrm{Hom}(G, C) \to$$
$$\xrightarrow{E_*} \mathrm{Ext}(G, A) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Ext}(G, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Ext}(G, C) \to 0 \qquad (3)$$

точны для любой группы G.

В силу теоремы 44.4 мы можем начать доказательство точности последовательности (2) с доказательства точности в члене Hom (A, G). Нам нужно показать, что гомоморфизм η: $A \to G$ продолжается до гомоморфизма ξ: $B \to G$ тогда и только тогда, когда расширение $\eta E \in \mathrm{Ext}(C, G)$ расщепляется. Но это как раз утверждение леммы 51.1. Следующий шаг доказательства — показать, что последовательность (2) точна в Ext (C, G). По лемме 51.2 расширение $E\beta$ расщепляется, поэтому для $\eta \in \mathrm{Hom}(A, G)$ имеем $\beta^* E^* \eta = \eta E\beta = 0$. Пусть E_1: $0 \to G \xrightarrow{\mu} H \xrightarrow{\nu} C \to 0 \in \mathrm{Ext}(C, G)$ таково, что $E_1\beta$ расщепляется. По лемме 51.2 существует такое ξ: $B \to H$, что $\nu\xi = \beta$. Так как $\nu\xi\alpha = \beta\alpha = 0$, то по лемме 2.1 существует η: $A \to G$, для которого $\mu\eta = \xi\alpha$. Следовательно, $(\eta, \xi, 1_C)$ отображает E на E_1, т. е. $E_1 = \eta E$.

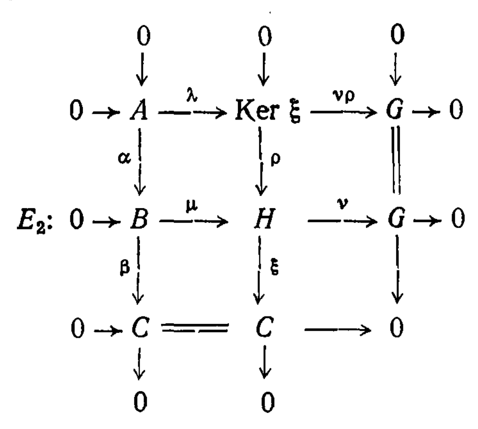
Чтобы показать, что последовательность (2) точна в Ext (B, G), заметим, что, очевидно, $\alpha^*\beta^* = (\beta\alpha)^* = 0^* = 0$. Чтобы доказать, что, наоборот, ядро содержится в образе, предположим, что для расширения E_2: $0 \to G \xrightarrow{\mu} H \xrightarrow{\nu} B \to 0 \in \text{Ext}(B, G)$ выполнено $E_2\alpha = 0$. В силу леммы 51.2 существует такой гомоморфизм ξ: $A \to H$, что $\nu\xi = \alpha$; ξ — мономорфизм. Так как $\beta\nu\xi = \beta\alpha = 0$, то существует такой гомоморфизм λ: $H/\xi A \to C$, что $\beta\nu = \lambda\rho$, где ρ: $H \to H/\xi A$ — канонический гомоморфизм. Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма



в которой все три столбца и первые две строки точны. По 3×3-лемме нижняя строка тогда тоже точна и представляет, таким образом, элемент из Ext (C, G), который отображается на E_2 при β^*. Точность последовательности (2) в Ext (A, G) выражает тот факт, что каждое расширение группы G при помощи группы A вкладывается в расширение группы G при помощи группы B; но это было показано в предложении 24.6.

Переходим к доказательству точности последовательности (3). В силу теоремы 44.4 и леммы 51.2 доказательство можно начать с точности в члене Ext (G, A). Если $\eta \in \text{Hom}(G, C)$, то $\alpha_* E_* \eta = \alpha E \eta = 0$, так как расширение αE в силу леммы 51.1 расщепляется. Предположим, что для E_1: $0 \to A \xrightarrow{\mu} H \xrightarrow{\nu} G \to 0 \in \text{Ext}(G, A)$ выполнено равенство $\alpha E_1 = 0$. Тогда по лемме 51.1 существует такой гомоморфизм ξ: $H \to B$, что $\xi\mu = \alpha$. Из $\beta\xi\mu = \beta\alpha = 0$ и леммы 2.2 вытекает существование такого η: $G \to C$, что $\eta\nu = \beta\xi$. Следовательно, $(1_A, \xi, \eta)$ отображает E на E_1, т. е. $E_1 = E\eta$. Теперь покажем, что последовательность (3) точна в Ext (G, B). В силу того, что $\beta_*\alpha_* = (\beta\alpha)_* = 0_* = 0$, достаточно показать, что ядро содержится в образе. Пусть для E_2: $0 \to B \xrightarrow{\mu} H \xrightarrow{\nu} G \to 0 \in \text{Ext}(G, B)$ выполнено $\beta E_2 = 0$. Тогда по лемме 51.1 существует такой гомоморфизм ξ: $H \to C$, что $\xi\mu = \beta$. Из $\xi\mu\alpha = 0$ вытекает существование отображения λ: $A \to \text{Ker}\,\xi$, для

которого $\rho\lambda = \mu\alpha$, где ρ: Ker $\xi \to H$ — вложение. Поэтому диаграмма



коммутативна и ее столбцы и две нижние строки точны. Согласно 3×3-лемме тогда и верхняя строка точна, т. е. является элементом группы Ext (G, A), который при α_* отображается на E_2. Наконец, то, что β_* — эпиморфизм, снова следует из предложения 24.6.∎

Точные последовательности (2) и (3) играют огромную роль, когда приходится иметь дело с Hom и Ext. Они широко используются при описании группы Ext, в частности в теории копериодических групп. Они указывают на тесную связь между Hom и Ext [в значительной мере используемую в гомологической алгебре].

Важно рассмотреть эту связь более подробно, так как она дает подход к изучению функтора Ext. Пусть даны группы A, C, и пусть $E_0: 0 \to H \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} C \to 0$ — свободная резольвента группы C, т. е. F и H — свободные группы. Для гомоморфизма $\eta: H \to A$ можно найти такую группу B и такой гомоморфизм χ: $F \to B$, что диаграмма

$$\begin{array}{lccccccccc} E_0: & 0 \to & H & \xrightarrow{\varphi} & F & \xrightarrow{\psi} & C & \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow{\scriptstyle\chi} & & \| & \\ \eta E_0: & 0 \to & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\nu} & C & \to 0 \end{array}$$

будет коммутативной и будет иметь точную нижнюю строку. Теперь легко видеть, что

$$E_0^*: \mathrm{Hom}\,(H, A) \to \mathrm{Ext}\,(C, A)$$

— эпиморфизм, ядро которого состоит из всех гомоморфизмов $\eta: H \to A$, которые могут быть продолжены до гомоморфизма $F \to A$. Заметим, что если

$$F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle \text{ и } H = \bigoplus_{j \in J} \langle y_j \rangle, \text{ где } y_j = \sum_i m_{ji} x_i$$

[$m_{ji} \in Z$, причем при фиксированном j почти все числа m_{ji} равны нулю], то расширением ηE_0 группы A при помощи группы C является группа

$$B = \langle A, x_i \quad (i \in I); \qquad \sum_i m_{ji} x_i = \eta y_j \quad (j \in J) \rangle.$$

Двум гомоморфизмам $\eta_1, \eta_2 : H \to A$ соответствуют эквивалентные расширения тогда и только тогда, когда $\eta_1 - \eta_2$ продолжается до гомоморфизма $F \to A$.

Упражнения

1. Группа G обладает тем свойством, что для любого эпиморфизма β: $B \to C$ индуцированное отображение β^*: Ext $(C, G) \to$ Ext (B, G) является мономорфизмом тогда и только тогда, когда G — делимая группа.

2. Группа G является свободной тогда и только тогда, когда для любого мономорфизма α: $A \to B$ отображение α_*: Ext $(G, A) \to$ $\to$ Ext (G, B) — мономорфизм.

3. Пусть β: $B \to C$ — эпиморфизм, и пусть β^*: Ext $(C, G) \to$ $\to$Ext (B, G)—мономорфизм при любой группе G. Тогда Ker β служит прямым слагаемым для группы B.

4. Пусть α: $A \to B$ — такой мономорфизм, что α_*: Ext $(G, A) \to$ $\to$ Ext (G, B) — мономорфизм для любой группы G. Показать, что αA — прямое слагаемое группы B.

5. Пусть $0 \to H \xrightarrow{\psi} F \xrightarrow{\varphi} C \to 0$ — свободная резольвента группы C. Доказать, что имеет место изоморфизм

$$\text{Ext}\,(C, A) \cong \text{Hom}\,(H, A)/\varphi^* \,\text{Hom}\,(F, A).$$

6. Пусть A есть p-группа и B — ее базисная подгруппа. При любой группе C группы Ext (C, A) и Ext (C, B) служат друг для друга эпиморфными образами.

7. Доказать, что

$$\text{Ext}\,(Q, Z) \cong Q^{\aleph_0}.$$

[*Указание*: применить теорему 51.3 к последовательности $0 \to Z \to$ $\to Q \to Q/Z \to 0$.]

8. Установить изоморфизм

$$\text{Ext}\,(Z\,(p^\infty), J_p) \cong J_p.$$

§ 52. Элементарные свойства группы Ext

Цель этого параграфа — отметить ряд элементарных, но особенно полезных свойств групп расширений. При этом мы часто будем пользоваться точными последовательностями, полученными в теореме 51.3.

Чтобы не прерывать наше изложение, сформулируем сначала простую лемму. В соответствии со сказанным в § 50, если E: $0 \to A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu}$ $\to C \to 0$ — расширение группы A при помощи группы C и α: $A \to A$,

γ: $C \to C$ — эндоморфизмы групп A и C соответственно, то αE и $E\gamma$ — снова расширения группы A при помощи группы C. Отображения

$$\alpha_*: E \mapsto \alpha E \quad \text{и} \quad \gamma^*: E \mapsto E\gamma,$$

очевидно, являются эндоморфизмами группы Ext (C, A); мы будем называть их *индуцированными эндоморфизмами* группы Ext. Формулы $(\alpha_1 + \alpha_2)_* = (\alpha_1)_* + (\alpha_2)_*$ и $(\alpha_1\alpha_2)_* = (\alpha_1)_* (\alpha_2)_*$ показывают, что кольцо эндоморфизмов группы A действует [как кольцо операторов] на Ext (C, A). Аналогично кольцо, двойственное кольцу эндоморфизмов группы C, действует на Ext (C, A) как кольцо операторов, причем имеет место коммутативность: $\alpha_*\gamma^* = \gamma^*\alpha_*$. Следовательно, Ext ($C$, A) является (унитарным) бимодулем над кольцами эндоморфизмов групп A и C, действующими соответственно слева и справа. Наша лемма утверждает следующий замечательный факт:

Лемма 52.1. *Умножение на целое число n в группе A или в группе C индуцирует умножение на n в группе* Ext (C, A). *То же имеет место для целых p-адических чисел.*

Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — эндоморфизмы группы A, то $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)_* = (\alpha_1)_* + \ldots + (\alpha_n)_*$. Так как, очевидно, 1_A индуцирует $1_{\text{Ext}(C,A)}$, то, выбрав $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1_A$, получаем требуемый результат. Доказательство для случая группы C аналогично.

Умножение на целое p-адическое число π в группе A индуцирует эндоморфизм π_* группы Ext (C, A). Ясно, что таким путем целые p-адические числа действуют на Ext (C, A). Число π является пределом последовательности $n_i \in \mathbf{Z}$ ($i = 1, 2, \ldots$) в p-адической топологии, скажем $p^i \mid \pi - n_i$ для каждого i. Следовательно, по доказанному получается, что π_* — предел умножений на n_i. Таким образом, π_* можно отождествить с умножением на π. ∎

Начнем с двух довольно тривиальных замечаний.

А) *Для группы C имеет место* Ext (C, A) = 0 *при любой группе A тогда и только тогда, когда C — свободная группа.*

Другими словами, для любой группы A расширение группы A при помощи группы C расщепляется тогда и только тогда, когда C — свободная группа. Достаточность этого условия эквивалентна утверждению теоремы 14.4, а необходимость следует из теоремы 14.6.

Б) *Для группы A имеет место равенство* Ext (C, A) = 0 *при любой группе C тогда и только тогда, когда A — делимая группа.*

Это другая формулировка того, что утверждения 1) и 3) теоремы 24.5 эквивалентны.

В) Обратимся теперь к следующей теореме.

Теорема 52.2. *Существуют естественные изоморфизмы*

$$\operatorname{Ext}(\bigoplus_{i\in I} C_i, A) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}(C_i, A), \quad (1)$$

$$\operatorname{Ext}(C, \prod_{j\in J} A_j) \cong \prod_{j\in J} \operatorname{Ext}(C, A_j). \quad (2)$$

Это можно доказать многими способами. Например, используем теорему 51.3. Возьмем точные последовательности $0 \to G_i \to F_i \to \to C_i \to 0$, где F_i — свободные группы. Эти последовательности индуцируют точную последовательность $0 \to \oplus G_i \to \oplus F_i \to \oplus C_i \to 0$. Теперь мы имеем $\operatorname{Hom}(F_i, A) \to \operatorname{Hom}(G_i, A) \to \operatorname{Ext}(C_i, A) \to \to \operatorname{Ext}(F_i, A) = 0$, где равенство справа получается в силу А). Это дает индуцированные точные последовательности

$$\begin{array}{ccccccc} \prod \operatorname{Hom}(F_i, A) & \to & \prod \operatorname{Hom}(G_i, A) & \to & \prod \operatorname{Ext}(C_i, A) & \to & 0, \\ \wr\| & & \wr\| & & & & \\ \operatorname{Hom}(\oplus F_i, A) & \to & \operatorname{Hom}(\oplus G_i, A) & \to & \operatorname{Ext}(\oplus C_i, A) & \to & 0, \end{array}$$

где вертикальные изоморфизмы естественные [см. теорему 43.1]. Следовательно, существует естественный изоморфизм между $\prod \operatorname{Ext}(C_i, A)$ и $\operatorname{Ext}(\oplus C_i, A)$. Доказательство существования изоморфизма (2) проводится двойственным образом. ∎

Г) *Для любой группы A и любого целого числа m*

$$\operatorname{Ext}(Z(m), A) \cong A/mA.$$

Последовательность $0 \to Z \xrightarrow{m} Z \to Z/mZ = Z(m) \to 0$ [где m — умножение на число m] точна. Отсюда, из теоремы 51.3 и того, что $\operatorname{Ext}(Z, A) = 0$, получаем, что точна последовательность $\operatorname{Hom}(Z, A) \xrightarrow{m} \to \operatorname{Hom}(Z, A) \to \operatorname{Ext}(Z(m), A) \to 0$ [см. также предложение 44.6]. Так как существует естественный изоморфизм $\operatorname{Hom}(Z, A) \cong A$, то группа $\operatorname{Ext}(Z(m), A)$ изоморфна группе A/mA [причем это опять естественный изоморфизм].

Заметим, что теорема 52.2 и п. Г) дают возможность найти группу $\operatorname{Ext}(C, A)$ в случае, когда C — прямая сумма циклических групп. В этом случае $\operatorname{Ext}(C, A)$ — прямое произведение групп вида A/mA.

Д) *Если $mA = 0$ или $mC = 0$ для некоторого целого числа m, то $m \operatorname{Ext}(C, A) = 0$.*

Это является очевидным следствием леммы 52.1.

Е) *Для любого целого числа m*

$$\operatorname{Ext}(C, Z(m)) \cong \operatorname{Ext}(C[m], Z(m)).$$

Так как последовательность $0 \to C[m] \to C \xrightarrow{m} mC \to 0$ точна, получаем индуцированную точную последовательность

$$\operatorname{Ext}(mC, Z(m)) \to \operatorname{Ext}(C, Z(m)) \to \operatorname{Ext}(C[m], Z(m)) \to 0.$$

В силу леммы 52.1 и п. Д) образ первого отображения здесь должен быть нулевым, откуда получается требуемый изоморфизм.

Ж) *Если* $mA = A$ *для некоторого* m, *то* $m \operatorname{Ext}(C, A) = \operatorname{Ext}(C, A)$.

В самом деле, из точности последовательности $A \xrightarrow{m} A \to 0$ следует точность последовательности $\operatorname{Ext}(C, A) \xrightarrow{m} \operatorname{Ext}(C, A) \to 0$.

З) *Автоморфизм* α *группы* A *индуцирует автоморфизм* α_* *группы* $\operatorname{Ext}(C, A)$.

Если $\bar{\alpha}$ — автоморфизм, обратный α, то, очевидно, отображение $\bar{\alpha}_*$ обратно α_*.

В частности, получается, что *из* $mA = A$ *и* $A[m] = 0$ *вытекает* $m \operatorname{Ext}(C, A) = \operatorname{Ext}(C, A)$ *и* $\operatorname{Ext}(C, A)[m] = 0$.

И) *Если* $C[m] = 0$, *то* $m \operatorname{Ext}(C, A) = \operatorname{Ext}(C, A)$. *В частности, если* C — *группа без кручения, то* $\operatorname{Ext}(C, A)$ — *делимая группа.*

Из сделанного предположения вытекает, что последовательность $0 \to C \xrightarrow{m} C$ точна. Значит, точна последовательность $\operatorname{Ext}(C, A) \xrightarrow{m} \operatorname{Ext}(C, A) \to 0$.

К) *Пусть* γ — *автоморфизм группы* C. *Тогда* γ^* — *автоморфизм группы* $\operatorname{Ext}(C, A)$.

Если $\bar{\gamma}$ — автоморфизм, обратный автоморфизму γ, то отображение $\bar{\gamma}^*$ обратно γ^*.

Отсюда следует, что *если* $mC = C$ *и* $C[m] = 0$, *то* $m \operatorname{Ext}(C, A) = \operatorname{Ext}(C, A)$ *и* $\operatorname{Ext}(C, A)[m] = 0$. *Если* C — *делимая группа без кручения, то это же верно для группы* $\operatorname{Ext}(C, A)$.

Л) *Если группа* A *является* p-*делимой, а* C *есть* p-*группа, то* $\operatorname{Ext}(C, A) = 0$.

Пусть D — делимая оболочка группы A. Тогда D/A — периодическая группа, имеющая нулевую p-компоненту, откуда $\operatorname{Hom}(C, D/A) = 0$. Теперь утверждение вытекает из точности последовательности $\operatorname{Hom}(C, D/A) \to \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C, D) = 0$.

М) Очень важна следующая теорема:

Теорема 52.3 (Эйленберг и Маклейн [1]). *Если* A — *группа без кручения, а* C — *периодическая группа, то*

$$\operatorname{Ext}(C, A) \cong \operatorname{Hom}(C, D/A),$$

где D — *делимая оболочка группы* A. *Следовательно,* $\operatorname{Ext}(C, A)$ — *редуцированная алгебраически компактная группа.*

Возьмем точную последовательность $0 \to A \to D \to D/A \to 0$, где D — группа без кручения. Тогда мы получим точную последовательность

$$0 = \operatorname{Hom}(C, D) \to \operatorname{Hom}(C, D/A) \to \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C, D) = 0,$$

откуда следует требуемый изоморфизм. Второе утверждение теоремы теперь сразу получается по теореме 46.1. ∎

Если взять $A = Z$, то получится следующий интересный изоморфизм:

Следствие 52.4. *Если C — периодическая группа, то*

$$\mathrm{Ext}\,(C,\ Z) \cong \mathrm{Char}\ C.$$

В самом деле, так как Q/Z — периодическая часть группы K [всех действительных чисел, рассматриваемых по модулю 1], то $\mathrm{Hom}\,(C, Q/Z)$ — это в точности $\mathrm{Char}\ C$. ∎

Н) *Если A — группа без кручения, p-базисная подгруппа которой имеет ранг $\mathfrak{m}$, то группа* $\mathrm{Ext}\,(Z\,(p^\infty),\ A)$ *изоморфна p-адическому пополнению группы* $\bigoplus_{\mathfrak{m}} J_p$.

Обозначим p-базисную подгруппу группы A через B. Тогда $0 \to B \to A \to A/B \to 0$ — точная последовательность, где A/B есть p-делимая группа, имеющая нулевую p-компоненту, откуда следует, что

$$\mathrm{Hom}\,(Z\,(p^\infty),\ A/B) = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Ext}\,(Z\,(p^\infty),\ A/B) = 0$$

[последнее в силу п. Л)]. Следовательно, точна последовательность $0 \to \mathrm{Ext}\,(Z\,(p^\infty),\ B) \to \mathrm{Ext}\,(Z\,(p^\infty),\ A) \to 0$, т. е. $\mathrm{Ext}\,(Z\,(p^\infty),\ A) \cong \mathrm{Ext}\,(Z\,(p^\infty),\ B)$. Здесь B — свободная группа ранга $\mathfrak{m}$, поэтому ее делимой оболочкой является группа $\bigoplus_{\mathfrak{m}} Q$, а факторгруппа делимой оболочки по подгруппе B — это $\bigoplus_{\mathfrak{m}} Q/Z$. Применяя теорему 52.3 и предложение 44.3, получаем требуемый изоморфизм.

О) *Если A — группа без кручения, то группа* $\mathrm{Ext}\,(C,\ A)$ *алгебраически компактна для любой группы C.*

Имеем точную последовательность $0 \to T \to C \to C/T \to 0$, где T — периодическая группа, C/T — группа без кручения. Следовательно, индуцированная последовательность

$$0 = \mathrm{Hom}\,(T,\ A) \to \mathrm{Ext}\,(C/T,\ A) \to \mathrm{Ext}\,(C,\ A) \to \mathrm{Ext}\,(T,\ A) \to 0$$

точна. По И) имеем, что $\mathrm{Ext}\,(C/T,\ A)$ — делимая группа, поэтому эта последовательность расщепляется:

$$\mathrm{Ext}\,(C,\ A) \cong \mathrm{Ext}\,(C/T,\ A) \oplus \mathrm{Ext}\,(T,\ A).$$

В силу теоремы 52.3 второе слагаемое алгебраически компактно, и утверждение доказано.

П) *Если группа A алгебраически компактна, то* $\mathrm{Ext}\,(C,\ A)$ — *редуцированная алгебраически компактная группа.*

Без ограничения общности можно предполагать, что группа A редуцированная. Тогда группа A служит прямым слагаемым для прямого произведения циклических p-групп [см. следствие 38.2]. Так как при умножении на p^n группа $\mathrm{Ext}\,(C,\ Z\,(p^n))$ обращается

в нуль [см. п. Д)], то эта группа является алгебраически компактной и редуцированной. Как следует из теоремы 52.2, (2), группа Ext (C, A) — прямое слагаемое прямого произведения таких групп. Таким образом, по следствию 38.3 группа Ext (C, A) алгебраически компактна.

Упражнения

1. Если A и C — конечные группы, то Ext $(C, A) \cong$ Hom (C, A).

2. Доказать, что если Ext $(Q/Z, A) = 0$, то A — делимая группа. [*Указание*: Ext $(Q, A) = 0$, а всякая группа является подгруппой прямой суммы групп, изоморфных группам Q/Z и Q.]

3. Если C — прямая сумма циклических групп, то Ext (C, A) — редуцированная алгебраически компактная группа.

4. Пусть для редуцированной группы A и целого числа $m > 0$ выполнено m Ext $(C, A) = 0$ при любой группе C. Доказать, что $mA = 0$.

5. Если для некоторой группы A и числа $m \in \mathbf{Z}$ имеет место m Ext $(C, A) =$ Ext (C, A) при любой группе C, то $mA = A$.

6. (а) Если для некоторой группы C и числа $m \in \mathbf{Z}$ справедливо m Ext $(C, A) =$ Ext (C, A) при любой группе A, то $C[m] = 0$.

(б) Если C — такая группа, что группа Ext (C, A) всегда является делимой группой без кручения, то C — делимая группа без кручения.

7. Определить инварианты группы Ext $(Q/Z, A)$ как алгебраически компактной группы, если A — группа без кручения, в частности если A — свободная группа.

8. Пусть C есть p-группа, A — группа без кручения. Каковы инварианты группы Ext (C, A) как алгебраически компактной группы? [*Указание*: провести рассуждения, как в п. Н).]

9 (Нунке [1]). Показать, что из Hom $(C, Z) =$ Ext $(C, Z) = 0$ вытекает $C = 0$. [*Указание*: доказать, что Ext $(T(C), Z) =$ Char $T(C) = 0$ и Ext $(C/mC, Z) = 0$; использовать упр. 7 § 51.]

10. Найти такие неизоморфные группы C_1, C_2, что Hom $(C_1, Z) \cong$ $\cong$ Hom (C_2, Z) и Ext $(C_1, Z) \cong$ Ext (C_2, Z).

11 (Нунке [2]). Если A — периодическая группа, C — группа без кручения, то группа Ext (C, A) — или непериодическая, или равна 0. [*Указание*: свести к p-группам A, затем, используя теорему 36.1,— к прямым суммам циклических групп; если группа A — неограниченная, написать $A = \bigoplus_n A_n$, где A — эпиморфный образ каждой группы A_n, и, используя следствие 42.2, доказать существование эпиморфизма Ext $(C, A) \to \prod$ Ext (C, A_n).]

12. Доказать, что если группа A допускает компактную топологию, то это же верно для группы Ext (C, A), где C — любая группа.

13 (Бэр [4]). p Ext $(C, A) =$ Ext (C, A) тогда и только тогда, когда или $C[p] = 0$, или $pA = A$.

14. Доказать, что имеет место изоморфизм

$$\text{Ext}\,(Q_p, Z) \cong Z(p^\infty) \oplus Q^{\aleph_0}.$$

[*Указание*: для оценки мощности использовать точную последовательность $0 \to Z \to Q_p \to \bigoplus_q Z(q^\infty) \to 0$, для нахождения периодической части — точную последовательность $0 \to Q_p \to Q \to Z(p^\infty) \to 0$ и К).]

15. Доказать, что

$$\mathrm{Ext}(Q_p, Q_p) = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Ext}(Q, Q_p) \cong Q^{\aleph_0}.$$

16. Проверить, что

$$\mathrm{Ext}(J_p, Z) \cong Z(p^\infty) \oplus Q^{2^{\aleph_0}} \quad \text{и} \quad \mathrm{Ext}(J_p, Q_p) \cong \mathrm{Ext}(J_p, Z).$$

17. Привести примеры, где

(а) $C = \varinjlim C_i$, но $\mathrm{Ext}(C, A) \neq \varprojlim \mathrm{Ext}(C_i, A)$. [*Указание*: C — группа без кручения, C_i — свободные группы.]

(б) $A = \varprojlim A_i$, но $\mathrm{Ext}(C, A) \neq \varprojlim \mathrm{Ext}(C, A_i)$. [*Указание*: упр. 6 § 21.]

18. (а) (Нунке [1]) Естественное отображение группы Ext в обратный предел в упр. 17 (а) является эпиморфизмом. [*Указание*: элемент обратного предела определяет прямой спектр точных последовательностей; взять его прямой предел.]

(б) Доказать то же для упр. 17 (б).

§ 53. Функтор Pext

Одним из наиболее удивительных фактов теории расширений групп является то, что расширения, соответствующие сервантно точным последовательностям, образуют подгруппу группы Ext, совпадающую с ее первой ульмовской подгруппой. Это приводит к новому функтору Pext, который будет изучаться в настоящем параграфе.

Начнем с двух довольно общих теорем; будут нужны только их очень частные случаи.

Теорема 53.1 (Бэр [4], Фукс [7]). *Пусть точная последовательность*

$$E\colon 0 \to A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu} C \to 0 \tag{1}$$

представляет элемент группы $\mathrm{Ext}(C, A)$, *и пусть* $\alpha\colon A \to A$ — *эндоморфизм. Тогда для индуцированного эндоморфизма* α_* *группы* $\mathrm{Ext}(C, A)$

1) $E \in \mathrm{Im}\, \alpha_*$ *в том и только в том случае, когда* $\mathrm{Im}\, \mu/\mathrm{Im}\, \mu\alpha$ *служит прямым слагаемым для группы* $B/\mathrm{Im}\, \mu\alpha$;

2) *если* $\mathrm{Im}\, \alpha = A$, *то* $E \in \mathrm{Ker}\, \alpha_*$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Im}\, \mu/\mu\, \mathrm{Ker}\, \alpha$ *служит прямым слагаемым для группы* $B/\mu\, \mathrm{Ker}\, \alpha$.

Для доказательства утверждения 1) (см. Теллман [1]) возьмем последовательности

$$0 \to \mathrm{Im}\, \alpha \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} \mathrm{Im}\, \mu/\mathrm{Im}\, \mu\alpha \to 0$$

и

$$0 \to \mathrm{Ker}\, \alpha \xrightarrow{\chi} A \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathrm{Im}\, \alpha \to 0,$$

которые, очевидно, точны, если отображения имеют естественный смысл. Это дает точные последовательности

$$\mathrm{Ext}(C, \mathrm{Im}\,\alpha) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Ext}(C, A) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Ext}(C, \mathrm{Im}\,\mu/\mathrm{Im}\,\mu\alpha) \to 0, \qquad (2)$$

$$\mathrm{Ext}(C, \mathrm{Ker}\,\alpha) \xrightarrow{\chi_*} \mathrm{Ext}(C, A) \xrightarrow{\bar{\alpha}_*} \mathrm{Ext}(C, \mathrm{Im}\,\alpha) \to 0. \qquad (3)$$

Очевидно, $\alpha_* = \varphi_*\bar{\alpha}_*$ и $\bar{\alpha}_*$ — эпиморфизм, поэтому $\mathrm{Im}\,\alpha_* = \mathrm{Im}\,\varphi_*\bar{\alpha}_* = \mathrm{Im}\,\varphi_* = \mathrm{Ker}\,\psi_*$. В силу определения гомоморфизма ψ_*

$$\psi_*E = \psi E\colon\ 0 \to \mathrm{Im}\,\mu/\mathrm{Im}\,\mu\alpha \to B/\mathrm{Im}\,\mu\alpha \xrightarrow{\nu'} C \to 0,$$

где $\nu'(b + \mathrm{Im}\,\mu\alpha) = \nu b$. Отсюда следует утверждение 1).

Для доказательства утверждения 2) заметим, что если $\mathrm{Im}\,\alpha = A$, то $\alpha = \bar{\alpha}$, поэтому $\mathrm{Ker}\,\alpha_* = \mathrm{Ker}\,\bar{\alpha}_* = \mathrm{Im}\,\chi_*$. Из 1) получаем, что условие $E \in \mathrm{Im}\,\chi_*$ эквивалентно нужному условию. ∎

Теорема 53.2 (Бэр [4]). *Пусть E — точная последовательность вида* (1), *и пусть $\gamma\colon C \to C$ — эндоморфизм группы C. Тогда для индуцированного эндоморфизма γ^* группы* $\mathrm{Ext}(C, A)$

1) $E \in \mathrm{Im}\,\gamma^*$ *в том и только в том случае, когда* $\mathrm{Im}\,\mu$ *служит прямым слагаемым для группы* $\nu^{-1}\,\mathrm{Ker}\,\gamma$;

2) *если* $\mathrm{Ker}\,\gamma = 0$, *то* $E \in \mathrm{Ker}\,\gamma^*$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Im}\,\mu$ — *прямое слагаемое группы* $\nu^{-1}\,\mathrm{Im}\,\gamma$.

Доказательство утверждения 1) аналогично предыдущему. Возьмем точные последовательности

$$0 \to \mathrm{Im}\,\gamma \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} C/\mathrm{Im}\,\gamma \to 0$$

и

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\gamma \xrightarrow{\chi} C \xrightarrow{\bar{\gamma}} \mathrm{Im}\,\gamma \to 0$$

и получим точные последовательности

$$\mathrm{Ext}(C/\mathrm{Im}\,\gamma, A) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Ext}(C, A) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Ext}(\mathrm{Im}\,\gamma, A) \to 0,$$

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{Im}\,\gamma, A) \xrightarrow{\bar{\gamma}^*} \mathrm{Ext}(C, A) \xrightarrow{\chi^*} \mathrm{Ext}(\mathrm{Ker}\,\gamma, A) \to 0.$$

Из того, что $\gamma^* = \bar{\gamma}^*\varphi^*$ и φ^* — эпиморфизм, вытекает, что $\mathrm{Im}\,\gamma^* = \mathrm{Im}\,\bar{\gamma}^* = \mathrm{Ker}\,\chi^*$. Здесь

$$\chi^*E = E\chi\colon\ 0 \to A \xrightarrow{\mu} \nu^{-1}\,\mathrm{Ker}\,\gamma \xrightarrow{\nu} \mathrm{Ker}\,\gamma \to 0,$$

и утверждение 1) доказано.

Если $\mathrm{Ker}\,\gamma = 0$, то $\bar{\gamma}$ — изоморфизм и $\bar{\gamma}^*$ — тоже изоморфизм. Следовательно, $\mathrm{Ker}\,\gamma^* = \mathrm{Ker}\,\varphi^*$. Так как

$$\varphi^*E = E\varphi\colon\ 0 \to A \xrightarrow{\mu} \nu^{-1}\,\mathrm{Im}\,\gamma \to \mathrm{Im}\,\gamma \to 0,$$

то утверждение 2) очевидно. ∎

Одним из следствий отсюда является

Теорема 53.3 (Нунке [1], Фукс [7]). *Точная последовательность E вида* (1) *принадлежит* $n\,\mathrm{Ext}\,(C,\ A)$ *тогда и только тогда, когда* $\mu A/n\mu A$ *служит прямым слагаемым для группы* $B/n\mu A$. *Последовательность E принадлежит первой ульмовской подгруппе группы* $\mathrm{Ext}\,(C,\ A)$ *тогда и только тогда, когда это сервантно точная последовательность.*

Если α — умножение на n в группе A, то лемма 52.1 утверждает, что $\mathrm{Im}\,\alpha_* = n\,\mathrm{Ext}\,(C,\ A)$. В теореме 53.1 было показано, что $E \in n\,\mathrm{Ext}\,(C,\ A)$ в точности тогда, когда $\mu A/n\mu A$ служит прямым слагаемым для группы $B/n\mu A$. Чтобы доказать вторую часть, достаточно применить теорему 27.10. ■

Таким образом, расширения E группы A при помощи группы C, представимые сервантно точными последовательностями, образуют подгруппу группы $\mathrm{Ext}\,(C,\ A)$. Мы будем называть ее *группой сервантных расширений* группы A при помощи группы C и обозначать через $\mathrm{Pext}\,(C,\ A)$ (Харрисон [1]). Приведенная выше теорема утверждает, что

$$\mathrm{Pext}\,(C,\ A) = \mathrm{Ext}\,(C,\ A)^1 = \bigcap_n n\ \mathrm{Ext}\,(C,\ A).$$

[Легко проверить, что расширение, эквивалентное сервантному расширению, само является сервантным расширением.]

Используя Pext, можно переформулировать полученные ранее результаты.

Предложение 53.4. *Группа A обладает свойством, что* $\mathrm{Pext}\,(C, A) = 0$ *для любой группы C, тогда и только тогда, когда группа A алгебраически компактна. Для группы C выполнено* $\mathrm{Pext}\,(C,\ A) = 0$ *при любой группе A тогда и только тогда, когда C — прямая сумма циклических групп.*

Первое утверждение вытекает из определения алгебраической компактности, второе — из теоремы 30.2. ■

Напомним, что Ext является функтором, а ульмовские подгруппы — это функторные подгруппы, поэтому Pext — снова функтор. Если $\alpha\colon A \to A'$ и $\gamma\colon C' \to C$ — гомоморфизмы, то ограничение гомоморфизма $\mathrm{Ext}\,(\gamma,\ \alpha)$ дает отображение

$$\mathrm{Pext}\,(\gamma,\ \alpha)\colon \mathrm{Pext}\,(C,\ A) \to \mathrm{Pext}\,(C',\ A').$$

Ввиду сказанного очевидно, что Pext есть аддитивный бифунктор из категории $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{A}$; он контравариантен по первому аргументу и ковариантен по второму. Чтобы установить, как он ведет себя по отношению к коротким точным последовательностям, докажем сначала следующие леммы.

Лемма 53.5 (Фукс [9]). *Если* (1) — *сервантно точная последовательность, то образами индуцированных гомоморфизмов*

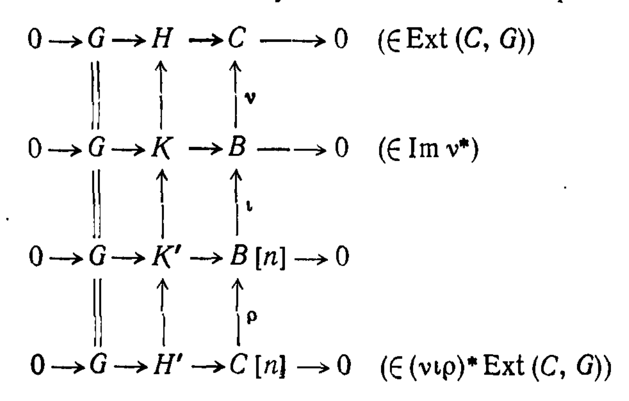
$$\nu^*\colon \operatorname{Ext}(C, G) \to \operatorname{Ext}(B, G)$$

и

$$\mu_*\colon \operatorname{Ext}(G, A) \to \operatorname{Ext}(G, B)$$

являются сервантные подгруппы.

Если дана верхняя строка следующей коммутативной диаграммы, то можно последовательно получить ее остальные строки:



здесь ι — вложение, а ρ: $C[n] \to B[n]$ — такое отображение, что $\nu\iota\rho$ — вложение $C[n] \to C$ [ρ существует в силу теоремы 28.4]. Предположим теперь, что вторая строка принадлежит $n \operatorname{Ext}(B, G)$. Это означает в силу теоремы 53.2, п. 1), что третья строка расщепляется. Отсюда следует, что нижняя строка расщепляется, поэтому снова по теореме 53.2, п. 1), верхняя строка принадлежит $n \operatorname{Ext}(C, G)$. Мы приходим к заключению, что вторая строка лежит в $n \operatorname{Im} \nu^*$, что доказывает сервантность подгруппы $\operatorname{Im} \nu^*$ в группе $\operatorname{Ext}(B, G)$.

Второе утверждение доказывается аналогично, нужно только использовать следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccccl}
0 & \to & A & \to & H & \to & G & \to & 0 & & (\in \operatorname{Ext}(G, A)) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow & & \| & & & & \\
0 & \to & B & \to & K & \to & G & \to & 0 & & (\in \operatorname{Im} \mu_*) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow & & \| & & & & \\
0 & \to & B/nB & \to & K' & \to & G & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow & & \| & & & & \\
0 & \to & A/nA & \to & H' & \to & G & \to & 0 & & (\in (\rho\pi\mu) \operatorname{Ext}(G, A))
\end{array}$$

где строки точны, π — естественное отображение и ρ: $B/nB \to A/nA$ таково, что $\rho\pi\mu$: $A \to A/nA$ — естественное отображение [ρ существует в силу предположений относительно последовательности (1)]. Все рассуждения сохраняются прежними, только ссылку на теорему 53.2, п. 1) нужно заменить ссылкой на теорему 53.1, п. 1). ∎

Лемма 53.6. *Предположим, что последовательность* (1) *представляет элемент из σ-й ульмовской подгруппы* $\operatorname{Ext}(C, A)^\sigma$ *группы* $\operatorname{Ext}(C, A)$. *Тогда для любой группы G образы связывающих гомоморфизмов*

$$E^*: \operatorname{Hom}(A, G) \to \operatorname{Ext}(C, G),$$

$$E_*: \operatorname{Hom}(G, C) \to \operatorname{Ext}(G, A)$$

являются подгруппами групп $\operatorname{Ext}(C, G)^\sigma$ *и* $\operatorname{Ext}(G, A)^\sigma$ *соответственно. В частности, если* (1) — *сервантно точная последовательность, то* $\operatorname{Im} E^*$ *и* $\operatorname{Im} E_*$ *содержатся в первых ульмовских подгруппах соответствующих групп.*

Всякий гомоморфизм $\eta \in \operatorname{Hom}(A, G)$ индуцирует отображение η_*: $\operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C, G)$, переводящее последовательность (1) в нижнюю строку коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} E\colon & 0 \to & A & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\nu} & C & \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow & & \| & \\ \eta E\colon & 0 \to & G & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\nu'} & C & \to 0 \end{array}$$

Всякий гомоморфизм отображает σ-ю ульмовскую подгруппу в σ-ю ульмовскую подгруппу, поэтому $\eta E \in \operatorname{Ext}(C, G)^\sigma$. Но нижняя строка — это как раз образ η при E^*. Утверждение, касающееся E_*, доказывается двойственным образом, а последнее утверждение леммы является простым следствием предыдущего, так как справедлива теорема 53.3. ∎

Вернемся к функтору Pext и докажем следующий аналог теоремы 51.3.

Теорема 53.7 (Харрисон [1]). Если E: $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — *сервантно точная последовательность, то для любой группы G точны следующие индуцированные последовательности:*

$$0 \to \operatorname{Hom}(C, G) \to \operatorname{Hom}(B, G) \to \operatorname{Hom}(A, G) \xrightarrow{E^*}$$
$$\to \operatorname{Pext}(C, G) \xrightarrow{\beta^*} \operatorname{Pext}(B, G) \xrightarrow{\alpha^*} \operatorname{Pext}(A, G) \to 0, \quad (4)$$

$$0 \to \operatorname{Hom}(G, A) \to \operatorname{Hom}(G, B) \to \operatorname{Hom}(G, C) \xrightarrow{E_*}$$
$$\to \operatorname{Pext}(G, A) \xrightarrow{\alpha_*} \operatorname{Pext}(G, B) \xrightarrow{\beta_*} \operatorname{Pext}(G, C) \to 0. \quad (5)$$

В силу леммы 53.6 и сказанного выше о группе Pext ясно, что последовательности (4) и (5) имеют смысл. Теорема 51.3 и лемма 53.5 показывают, что последовательность

$$0 \to \operatorname{Ext}(C, G)/\operatorname{Im} E^* \xrightarrow{\beta^*} \operatorname{Ext}(B, G) \xrightarrow{\alpha^*} \operatorname{Ext}(A, G) \to 0$$

сервантно точна. Из лемм 53.6 и 37.1 видно, что $(\operatorname{Ext}(C, G)/\operatorname{Im} E^*)^1 = \operatorname{Ext}(C, G)^1/\operatorname{Im} E^*$. Так как пересечение является обратным пределом, то точность последовательности (4) будет доказана, если мы применим теорему 12.3 и дополнительно докажем, что α^* — эпиморфизм. Пусть E_0: $0 \to H \to F \to B \to 0$ — сервантно проективная резольвента группы B. Тогда $E_0\alpha$: $0 \to H \to F' \to A \to 0$ — сервантно проективная резольвента группы A. По уже доказанному имеет место точная последовательность $\operatorname{Hom}(H, G) \to \operatorname{Pext}(A, G) \to \operatorname{Pext}(F', G) = 0$. Поэтому первое отображение $(E_0\alpha)^* = \alpha^* E_0^*$ является эпиморфизмом, откуда α^* — также эпиморфизм. Точность последовательности (5) проверяется аналогично. ∎

Один частный случай заслуживает особого упоминания:

Следствие 53.8. *Пусть A — такая группа, что $A^1 = 0$. Тогда*

$$\operatorname{Pext}(Q/Z, A) \cong \operatorname{Hom}(Q/Z, \hat{A}/A),$$

где $\hat{A}$ есть Z-адическое пополнение группы A.

Начав с сервантно точной последовательности $0 \to A \to \hat{A} \to \hat{A}/A \to 0$, с помощью (5) получаем точную последовательность

$$0 = \operatorname{Hom}(Q/Z, \hat{A}) \to \operatorname{Hom}(Q/Z, \hat{A}/A) \to \operatorname{Pext}(Q/Z, A) \to \operatorname{Pext}(Q/Z, \hat{A}) = 0.$$

Последняя группа здесь равна нулю в силу алгебраической компактности группы $\hat{A}$. ∎

Это следствие можно обобщить [см. лемму 57.3].

Упражнения

1 (Бэр [4]). Пусть α: $A \to A$ — эпиморфизм. Тогда ядро $\operatorname{Ker}\alpha_*$ индуцированного эндоморфизма α_* группы $\operatorname{Ext}(C, A)$ является эпиморфным образом группы $\operatorname{Ext}(C, \operatorname{Ker}\alpha)$.

2 (Бэр [4]). Пусть α — такой эндоморфизм группы A, что $\operatorname{Ext}(C, \operatorname{Ker}\alpha) = 0$. Тогда ядро индуцированного эндоморфизма α_* группы $\operatorname{Ext}(C, A)$ изоморфно группе $\operatorname{Hom}(C, A/\alpha A)/\eta_* \operatorname{Hom}(C, A)$, где η_* индуцируется каноническим отображением η: $A \to A/\alpha A$. [*Указание*: $\bar{\alpha}_*$ в последовательности (3) является изоморфизмом; продолжить последовательность (2) влево.]

3 (Бэр [4]). Пусть γ: $C \to C$ — мономорфизм. Тогда ядро индуцированного эндоморфизма γ^* группы $\operatorname{Ext}(C, A)$ является эпиморфным образом группы $\operatorname{Ext}(C/\operatorname{Im}\gamma, A)$.

4. Расширение E вида (1) лежит в подгруппе Фраттини группы $\operatorname{Ext}(C, A)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\mu$ — слабо сервантная подгруппа группы B.

5. Последовательность E вида (1) является p-сервантно точной тогда и только тогда, когда она представляет элемент из p^{ω} Ext (C, A).

6. Показать, что имеют место естественные изоморфизмы

$$\mathrm{Pext}\,(\oplus\, C_i,\ A) \cong \prod \mathrm{Pext}\,(C_i,\ A),$$
$$\mathrm{Pext}\,(C,\ \prod A_j) \cong \prod \mathrm{Pext}\,(C,\ A_j).$$

7. Пусть A — прямая сумма циклических p-групп и C — делимая p-группа. Доказать, что те расширения группы A при помощи группы C, в которых A — базисная подгруппа, образуют подгруппу группы Ext (C, A). Определить строение этой подгруппы. [*Указание*: использовать следствие 53.8.]

8. Пусть $0 \to A \to B \to C \to 0$ — сервантно точная последовательность, G — алгебраически компактная группа. Тогда последовательность

$$0 \to \mathrm{Ext}\,(C,\ G) \to \mathrm{Ext}\,(B,\ G) \to \mathrm{Ext}\,(A,\ G) \to 0$$

точна и расщепляется. [*Указание*: использовать лемму 53.6, п. П) § 52 и лемму 53.5.]

9. Пусть $0 \to A \to B \to C \to 0$ — сервантно точная последовательность и F — прямая сумма циклических групп. Тогда последовательность $0 \to \mathrm{Ext}\,(F, A) \to \mathrm{Ext}\,(F, B) \to \mathrm{Ext}\,(F, C) \to 0$ точна и расщепляется.

10. Последовательность $0 \to A \to B \to C \to 0$ сервантно точна тогда и только тогда, когда для любого $m > 0$ точна [или, что эквивалентно, сервантно точна] либо последовательность

$$0 \to \mathrm{Ext}\,(C,\ Z\,(m)) \to \mathrm{Ext}\,(B,\ Z\,(m)) \to \mathrm{Ext}\,(A,\ Z\,(m)) \to 0,$$

либо последовательность

$$0 \to \mathrm{Ext}\,(Z\,(m),\ A) \to \mathrm{Ext}\,(Z\,(m),\ B) \to \mathrm{Ext}\,(Z\,(m),\ C) \to 0.$$

11. Пусть группа A алгебраически компактна, и пусть T — периодическая часть группы C. Доказать, что имеет место естественный изоморфизм Ext $(C, A) \cong$ Ext (T, A).

12. Пусть A — группа без кручения, и пусть T — периодическая часть группы C. Тогда $\mathrm{Ext}\,(C, A) \cong \mathrm{Ext}\,(T, A) \oplus \mathrm{Ext}\,(C/T, A)$.

13. Если A — группа без кручения, а C — периодическая группа с базисной подгруппой B, то

$$\mathrm{Ext}\,(C,\ A) \cong \mathrm{Ext}\,(B,\ A) \oplus \mathrm{Ext}\,(C/B,\ A).$$

Показать, что это позволяет оценить инварианты алгебраически компактной группы Ext (C, A).

14 (Бэр [4]). (а) Пусть A — периодическая группа, а C — такая группа без кручения, что факторгруппа C/pC конечна для некоторого простого числа p. Тогда Ext $(C, A)\,[p] = 0$. [*Указание*: использовать упражнение 2; показать, что всякий гомоморфизм $C \to A/pA$ индуцируется некоторым гомоморфизмом ξ: $C \to A$, для которого $\mathrm{Im}\,\xi$ — конечная подгруппа базисной подгруппы группы A.]

(б) Пусть A — периодическая группа, C — группа без кручения конечного ранга. Доказать, что $\text{Ext}(C, A)$ — делимая группа без кручения.

(в) При предположениях п. (б) либо $\text{Ext}(C, A) = 0$, либо $\text{Ext}(C,A) = Q^{\mathfrak{n}}$, где $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$. [*Указание*: использовать лемму 52.1.]

15. Если первая ульмовская подгруппа группы A равна нулю, то

$$\text{Ext}(Q, A) \cong \text{Hom}(Q, \hat{A}/A).$$

§ 54. Копериодические группы

Понятие копериодической группы играет фундаментальную роль при изучении группы Ext. Это понятие было введено Харрисоном [1] и независимо Нунке [1] и Фуксом [9].

Группа G называется *копериодической*, если

$$\text{Ext}(J, G) = 0$$

для любой группы без кручения J. Другими словами, группа G является копериодической, если всякое расширение группы G при помощи группы без кручения расщепляется. Так как это означает, что копериодическая группа выделяется прямым слагаемым из всякой группы, содержащей ее в качестве подгруппы, факторгруппа по которой является группой без кручения, то очевидно, что все алгебраически компактные группы являются копериодическими. Мы увидим, что обратное места не имеет.

Всякую группу без кручения J можно вложить в точную последовательность $0 \to J \to \oplus Q$, где взято достаточное число групп, изоморфных группе Q. По теореме 51.3 это дает точную последовательность $\text{Ext}(\oplus Q, G) \cong \prod \text{Ext}(Q, G) \to \text{Ext}(J, G) \to 0$. Следовательно, для копериодичности группы G достаточно, чтобы было $\text{Ext}(Q,G) = 0$. Таким образом, копериодические группы можно также определить как группы G, для которых

$$\text{Ext}(Q, G) = 0.$$

Из предложений 38.5 и 53.4 следует, что *группа G алгебраически компактна тогда и только тогда, когда* $\text{Ext}(Q, G) = 0$ *и* $\text{Pext}(Q/Z, G) = 0$.

Уместно привести здесь ряд более или менее простых результатов, касающихся копериодических групп.

A) *Эпиморфный образ копериодической группы является копериодической группой.*

Если G — копериодическая группа и $G \to H \to 0$ — точная последовательность, то точна последовательность $0 = \text{Ext}(Q, G) \to \text{Ext}(Q, H) \to 0$. Следовательно, $\text{Ext}(Q, H) = 0$, и группа H копериодическая.

Б) *Пусть G — редуцированная копериодическая группа. Подгруппа H группы G является копериодической тогда и только тогда, когда G/H — редуцированная группа.*

Точная последовательность $0 \to H \to G \to G/H \to 0$ дает точную последовательность

$$0 = \mathrm{Hom}(Q, G) \to \mathrm{Hom}(Q, G/H) \to \mathrm{Ext}(Q, H) \to \mathrm{Ext}(Q, G) = 0,$$

поэтому $\mathrm{Ext}(Q, H) \cong \mathrm{Hom}(Q, G/H)$. Вторая из этих групп равна нулю тогда и только тогда, когда G/H — редуцированная группа.

В) *Если G — редуцированная копериодическая группа, то для любого эндоморфизма θ группы G как $\mathrm{Ker}\,\theta$, так и $\mathrm{Im}\,\theta$ — копериодические группы.*

Это непосредственно следует из пп. А) и Б).

Г) *Если H — подгруппа группы G, причем H и G/H — копериодические группы, то группа G копериодическая.*

Снова из точности последовательности $0 \to H \to G \to G/H \to 0$ получаем, что последовательность $0 = \mathrm{Ext}(Q, H) \to \mathrm{Ext}(Q, G) \to \to \mathrm{Ext}(Q, G/H) = 0$ точна.

Д) *Прямое произведение $\prod\limits_{i \in I} G_i$ является копериодической группой тогда и только тогда, когда каждое G_i — копериодическая группа.*

Это сразу следует из того, что $\mathrm{Ext}(Q, \prod\limits_i G_i) \cong \prod\limits_i \mathrm{Ext}(Q, G_i)$.

Е) *Обратный предел редуцированных копериодических групп является редуцированной копериодической группой.*

Обратный предел G^* редуцированных копериодических групп G_i — это подгруппа группы $\prod G_i$. По Д) эта последняя группа является редуцированной и копериодической. Следовательно, в силу утверждения Б) нам нужно только проверить, что факторгруппа $(\prod G_i)/G^*$ является редуцированной группой. Напомним, что группа G^* есть пересечение ядер некоторых эндоморфизмов θ группы $\prod G_i$, и поэтому $(\prod G_i)/G^*$ — подпрямая сумма групп $\mathrm{Im}\,\theta$. Группы $\mathrm{Im}\,\theta$ редуцированные, и все доказано.

Ж) *Если G — копериодическая группа, то $\mathrm{Hom}(A, G)$ является копериодической группой при любой группе A.*

В силу теоремы 47.7 достаточно доказать это для редуцированных групп G. Пусть $0 \to H \to F \to A \to 0$ — свободная резольвента группы A. Согласно теореме 44.4, последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(A, G) \to \to \mathrm{Hom}(F, G) \to \mathrm{Hom}(H, G)$ точна. Средняя группа здесь является прямым произведением групп, изоморфных группе G, поэтому она — редуцированная копериодическая группа. Так как $\mathrm{Hom}(H, G)$ — редуцированная группа, то остается применить п. Б).

Исключительно важно следующее утверждение.

З) *Если G — редуцированная копериодическая группа, то существует естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Ext}\,(Q/Z,\ G) \cong G.$$

Возьмем точную последовательность $0 \to Z \to Q \to Q/Z \to 0$, которую мы в дальнейшем будем часто использовать. Она индуцирует точную последовательность

$$0 = \mathrm{Hom}\,(Q,\ G) \to \mathrm{Hom}\,(Z,\ G) \cong G \to \mathrm{Ext}\,(Q/Z,\ G) \to \mathrm{Ext}\,(Q,\ G) = 0.$$

Связывающий гомоморфизм дает то, что нужно.

И) Редуцированная копериодическая группа G однозначно записывается в виде

$$G = \prod_p G_p,$$

где G_p для каждого простого числа p есть редуцированная копериодическая группа, являющаяся p-адическим модулем.

В силу утверждения З) мы можем написать

$$G \cong \mathrm{Ext}\,(Q/Z,\ G) = \mathrm{Ext}\,(\bigoplus_p Z\,(p^\infty),\ G) \cong \prod_p \mathrm{Ext}\,(Z\,(p^\infty),\ G)$$

Так как p-адические числа можно рассматривать как операторы, действующие на группе $Z\,(p^\infty)$, то из леммы 52.1 получается, что $G_p = \mathrm{Ext}\,(Z\,(p^\infty),\ G)$ есть p-адический модуль. По Е) группа G_p копериодическая. Единственность разложения вытекает из того, что если мы будем трансфинитно повторять процесс взятия пересечений $\bigcap nG$, где $(n,\ p) = 1$, то в конце мы получим G_p.

Теперь мы можем вывести ряд следствий, которые позволят нам глубже проникнуть в природу копериодических групп, в частности, найти точное соотношение между копериодическими и алгебраически компактными группами.

Предложение 54.1. *Группа является копериодической тогда и только тогда, когда она — эпиморфный образ алгебраически компактной группы.*

В силу утверждения А) достаточно доказать, что редуцированная копериодическая группа G является эпиморфным образом некоторой алгебраически компактной группы A. Группу G мы можем вложить в точную последовательность $0 \to G \to D \to D/G \to 0$, где D — делимая группа. Это дает точную последовательность

$$\mathrm{Hom}\,(Q/Z,\ D/G) \to \mathrm{Ext}\,(Q/Z,\ G) \to \mathrm{Ext}\,(Q/Z,\ D) = 0.$$

Здесь $\mathrm{Hom}\,(Q/Z,\ D/G)$ — алгебраически компактная группа [см. теорему 46.1 или теорему 47.7], тогда как средняя группа в силу утверждения З) изоморфна группе G. Отсюда получается нужный результат. ■

Предложение 54.2 (Фукс [9]). *Редуцированная копериодическая группа алгебраически компактна тогда и только тогда, когда ее первая ульмовская подгруппа равна нулю.*

В силу одного из наших вводных замечаний копериодическая группа G алгебраически компактна в точности тогда, когда $\mathrm{Pext}(Q/Z, G) = 0$. Теперь достаточно использовать утверждение З) и теорему 53.3. ∎

Теорема 54.3 (Фукс [9]). *Ульмовские подгруппы копериодических групп являются копериодическими группами, а ульмовские факторы копериодических групп алгебраически компактны.*

Если G^σ есть σ-я ульмовская подгруппа копериодической группы G, то G/G^σ — редуцированная группа, и первое утверждение вытекает из Б). В силу А) нулевой ульмовский фактор $G^\sigma/G^{\sigma+1}$ группы G^σ снова является копериодической группой. Его первая ульмовская подгруппа равна нулю, поэтому по предложению 54.2 он является алгебраически компактной группой. ∎

Если применить утверждение Г) конечное число раз, то получится следующее утверждение [которое является частичным обращением теоремы 54.3]: *если группа G имеет конечную ульмовскую длину и все ее ульмовские факторы алгебраически компактны, то G— копериодическая группа.* Однако, если группа G имеет бесконечную ульмовскую длину, то она не обязана быть копериодической, даже если все ее ульмовские факторы алгебраически компактны.

Следствие 54.4 (Харрисон [1], Нунке [1]). *Периодическая группа является копериодической тогда и только тогда, когда она — прямая сумма делимой группы и ограниченной группы.*

Первый ульмовский фактор периодической копериодической группы G есть редуцированная периодическая алгебраически компактная группа, поэтому в силу следствия 40.3 он является ограниченной группой. Если m — число, делящееся на порядки всех элементов этого фактора, то $mG \subseteq G^1$, откуда $mG \subseteq nmG$ для любого n, т. е. $mG = G^1$ — делимая группа. Следовательно, группа G имеет нужный вид. Обратное очевидно. ∎

Следствие 54.5 (Фукс [9]). *Группа без кручения является копериодической тогда и только тогда, когда она алгебраически компактна.*

В силу единственности деления в группе без кручения G подгруппа G^1 должна быть делимой. Следовательно, всякая группа без кручения G является прямой суммой делимой группы и группы, изоморфной нулевому ульмовскому фактору G_0. В силу п. Д) группа G является копериодической тогда и только тогда, когда G_0 — копериодическая группа. Но по предложению 54.2 копериодичность группы G_0 эквивалентна ее алгебраической компактности. ∎

Следующий результат является тривиальным следствием некоторого изоморфизма, получаемого в гомологической алгебре и устанавливающего некоторого рода ассоциативность для Ext. Наши сведения о копериодических группах позволяют получить его, не используя указанный изоморфизм:

Теорема 54.6. *Для любых групп A и C группа* Ext (C, A) *является копериодической.*

Вложим группу A в точную последовательность $0 \to A \to D \to D/A \to 0$, где D — делимая группа. Это даст точную последовательность

$$\operatorname{Hom}(C, D/A) \to \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C, D) = 0.$$

Так как D/A — делимая группа, то из теоремы 47.7 вытекает, что первая группа здесь алгебраически компактна. Следовательно, группа Ext (C, A), как эпиморфный образ алгебраически компактной группы, является копериодической. ∎

Этот результат дает способ получения копериодических групп: можно просто брать группы Ext (C, A) для любых групп C и A. Утверждение 3) показывает, что этот способ является наиболее общим в том смысле, что все редуцированные копериодические группы могут быть так получены. С другой стороны, теорема 54.6 также показывает, что для того, чтобы получить бóльшую информацию о строении группы Ext, нужно более детально изучить копериодические группы вообще.

Упражнения

1. Пусть G — редуцированная копериодическая группа и H — ее подгруппа. Существует единственная минимальная копериодическая подгруппа группы G, содержащая H.

2. Показать, что утверждение В) перестает быть в общем случае верным, если отбросить требование редуцированности.

3. Если G — копериодическая группа с ограниченной периодической частью, то группа G алгебраически компактна.

4. Счетная копериодическая группа является прямой суммой делимой группы и ограниченной группы.

5. Пусть G — ненулевая редуцированная копериодическая группа. Тогда она обладает прямым слагаемым, являющимся циклическим p-адическим модулем при некотором простом числе p.

6 (Ротман [1]). Редуцированная группа G является копериодической тогда и только тогда, когда E/G — редуцированная группа для любой редуцированной группы E, содержащей группу G.

7*. Описать ульмовские факторы группы Hom (A, G) для редуцированной копериодической группы G. [*Указание*: рассмотреть периодическую часть T группы A и p-базисные подгруппы группы A/T.]

8. Доказать аналог теоремы 39.9 для редуцированных копериодических групп A.

9. Доказать, что естественный гомоморфизм μ копериодической группы G в ее Z-адическое пополнение $\hat{G}$ является эпиморфизмом.

10. Если D — делимая оболочка копериодической группы G и E ($\subseteq D$) — делимая оболочка подгруппы G^1, то $E+G$ — алгебраически компактная группа, являющаяся сервантно инъективной оболочкой группы G.

11. Пусть для группы A справедливо $A^1=0$, и пусть $\hat{A}$ есть Z-адическое пополнение группы A. Показать, что нулевой ульмовский фактор группы $\operatorname{Ext}(C, A)$ изоморфен группе $\operatorname{Ext}(C, \hat{A})$. [*Указание*: последовательность $0 \to A \to \hat{A} \to \hat{A}/A \to 0$ сервантно точна и $\hat{A}/A$ — делимая группа.]

12. Доказать, что для любой копериодической группы G существует такая копериодическая группа A, что $A^1 \cong G$. [*Указание*: использовать упр. 11 из § 37 и предложение 24.6.]

13*. (а) Для заданного натурального числа n найти копериодическую группу ульмовской длины n. [*Указание*: использовать упр. 12.]

(б) Построить копериодическую группу ульмовской длины ω. [*Указание*: использовать обратный предел.]

14*. Существует группа ульмовской длины ω, ульмовские факторы которой алгебраически компактны, но которая не является копериодической. [*Указание*: взять копериодическую группу G длины ω и построить нужную подгруппу внутри группы $\varprojlim G/G^n$.]

15. Доказать следствие 54.5 с помощью предложения 54.1 и упр. 3 из § 38.

§ 55. Строение копериодических групп

Наша очередная задача — изложить теорию копериодических групп во всей полноте. Хотя имеется несомненная аналогия между алгебраически компактными и копериодическими группами [о которой будет сказано в следующих параграфах], для копериодических групп не существует общей структурной теоремы. Именно, оказывается, что классификация периодических групп и классификация копериодических групп — это по существу одно и то же, а, как мы увидим в гл. XII, полная структурная теорема может быть дана только для некоторых классов периодических групп, причем эти классы не слишком широки.

К основному результату нас подводят две важные леммы.

Лемма 55.1 (Харрисон [1]). *Если T — редуцированная периодическая группа, то периодическая часть группы* $\operatorname{Ext}(Q/Z, T)$ *изоморфна группе T, а факторгруппа по ней — делимая группа без кручения.*

Из точности последовательности $0 \to Z \to Q \to Q/Z \to 0$ следует точность последовательности

$$0=\operatorname{Hom}(Q, T) \to \operatorname{Hom}(Z, T) \cong T \to$$
$$\to \operatorname{Ext}(Q/Z, T) \to \operatorname{Ext}(Q, T) \to \operatorname{Ext}(Z, T)=0.$$

Отсюда получается, что лемма будет доказана, если мы докажем, что $\operatorname{Ext}(Q, T)$ — делимая группа без кручения. Но это верно в силу утверждения К) из § 52. ∎

Лемма 55.2. *Если T — периодическая часть смешанной группы A, то*

$$\operatorname{Ext}(Q/Z, A) \cong \operatorname{Ext}(Q/Z, T) \oplus \operatorname{Ext}(Q/Z, A/T).$$

Так как последовательность $0 \to T \to A \to J \to 0$, где $J = A/T$, точна, то точна последовательность

$$0 = \operatorname{Hom}(Q/Z, J) \to \operatorname{Ext}(Q/Z, T) \to$$
$$\to \operatorname{Ext}(Q/Z, A) \to \operatorname{Ext}(Q/Z, J) \to 0.$$

Из теоремы 52.3 мы знаем, что здесь последняя группа изоморфна группе $\operatorname{Hom}(Q/Z, D/J)$, где D — делимая оболочка группы J. Следовательно, группа $\operatorname{Ext}(Q/Z, J)$ является прямым произведением групп $\operatorname{Hom}(Z(p^\infty), D/J)$, где p пробегает все простые числа. Предложение 44.3 показывает, что эти группы являются группами без кручения. Так как $\operatorname{Ext}(Q/Z, T)$ по теореме 54.6 есть копериодическая группа, то последняя точная последовательность расщепляется. Отсюда получаем требуемый изоморфизм.

Лемма 55.3. *Для любой периодической группы C группа* $\operatorname{Ext}(C, A)$ *является редуцированной.*

Если C — периодическая группа, то существует сервантно точная последовательность $0 \to H \to F \to C \to 0$, где F [и, таким образом, H] — прямая сумма конечных циклических групп [см. лемму 30.1]. Следовательно, по теореме 53.7 имеем точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(C, A) \to \operatorname{Hom}(F, A) \to \operatorname{Hom}(H, A) \to \operatorname{Pext}(C, A) \to 0,$$

так как $\operatorname{Pext}(F, A) = 0$ в силу предложения 53.4. Из теоремы 46.1 мы знаем, что группы Hom здесь являются редуцированными алгебраически компактными группами, поэтому в силу предложения 44.7 группа $\operatorname{Hom}(C, A)$ служит прямым слагаемым для группы $\operatorname{Hom}(F, A)$. Отсюда получается точная последовательность $0 \to G \to \operatorname{Hom}(H, A) \to \operatorname{Pext}(C, A) \to 0$, где G и $\operatorname{Hom}(H, A)$ — редуцированные алгебраически компактные группы. Применяя теорему 51.3, получаем точную последовательность

$$0 = \operatorname{Hom}(Q, \operatorname{Hom}(H, A)) \to \operatorname{Hom}(Q, \operatorname{Pext}(C, A)) \to \operatorname{Ext}(Q, G) = 0.$$

Это показывает, что $\operatorname{Pext}(C, A)$ и, следовательно, $\operatorname{Ext}(C, A)$ — редуцированная группа. ∎

Редуцированная копериодическая группа, не имеющая ненулевых прямых слагаемых, являющихся группами без кручения, называется *урегулированной*. Для случая, когда $C = Q/Z$ и A — периодическая группа, лемму 55.3 можно усилить:

Лемма 55.4 (Харрисон [1]). *Если T — периодическая группа, то* $\operatorname{Ext}(Q/Z, T)$ *— урегулированная копериодическая группа.*

По лемме 55.1 всякое прямое слагаемое без кручения группы $\operatorname{Ext}(Q/Z, T)$ должно быть делимой группой. Применение леммы 55.3 завершает доказательство. ∎

Теперь мы в состоянии проверить справедливость двух основных результатов, касающихся строения копериодических групп.

Теорема 55.5 (Харрисон [1]). *Пусть G — редуцированная копериодическая группа и T — ее периодическая часть. Тогда существует прямое разложение*

$$G = A \oplus C, \tag{1}$$

где A — алгебраически компактная группа без кручения, а $C \cong \operatorname{Ext}(Q/Z, T)$ — урегулированная копериодическая группа. Группа C является однозначно определенной подгруппой группы G.

Объединяя утверждение 3) из § 54 с леммой 55.2, получаем

$$G \cong \operatorname{Ext}(Q/Z, G) \cong \operatorname{Ext}(Q/Z, T) \oplus \operatorname{Ext}(Q/Z, G/T).$$

По лемме 55.4 первое слагаемое есть урегулированная копериодическая группа. Обозначим его через C. Второе слагаемое [обозначим его через A] является в силу теоремы 52.3 и предложения 44.3 редуцированной алгебраически компактной группой без кручения. Единственность подгруппы C сразу следует из замечания, что подгруппа C содержит T, C/T — делимая группа без кручения [см. лемму 55.1] и, таким образом, C/T — это в точности максимальная делимая подгруппа группы G/T. ∎

Из теоремы 55.5 следует, что мы можем говорить о подгруппе C как об *урегулированной части* редуцированной копериодической группы G. Эта теорема имеет то важное следствие, что всякую копериодическую группу G можно разложить в прямую сумму трех групп:

$$G = A \oplus C \oplus D,$$

где D — максимальная делимая подгруппа группы G, C — урегулированная копериодическая группа, A — редуцированная алгебраически компактная группа без кручения. Это разложение группы G определено однозначно с точностью до изоморфизма, так как D и $C \oplus D$ — однозначно определенные подгруппы группы G. Мы знаем, что группы A и D можно достаточно хорошим образом полностью охарактеризовать с помощью инвариантов, являющихся кардинальными числами. Следовательно, структурная проблема для копериодических групп сводится к случаю урегулированных копериодических групп. В силу приводимой ниже замечательной теоремы структурная проблема для этих последних групп оказывается эквивалентной такой же проблеме для редуцированных периодических групп.

Теорема 55.6 (Харрисон [1]). *Соответствие*

$$T \mapsto \operatorname{Ext}(Q/Z, T) = G \tag{2}$$

дает взаимно однозначное отображение класса редуцированных периодических групп T на класс урегулированных копериодических групп G. Отображение, обратное отображению (2), *является взятием периодической части группы G.*

Пусть T — редуцированная периодическая группа. По лемме 55.4 группа G, получаемая при отображении (2), является урегулированной копериодической группой, периодическая часть которой в силу леммы 55.1 изоморфна группе T. С другой стороны, пусть G — какая-то урегулированная копериодическая группа и T — ее периодическая часть. Тогда имеет место разложение (1), где $A = 0$, так как группа G урегулированная. Следовательно, $G = C \cong \operatorname{Ext}(Q/Z, T)$. ■

Эта теорема сопоставляет группе G те же инварианты, что и группе T, поэтому ее можно считать [в более широком смысле] структурной теоремой для урегулированных копериодических групп в тех случаях, когда группа T известна, в частности, когда группа T счетна или является прямой суммой счетных групп [см. гл. XII].

Упражнения

1. Пусть A — копериодическая группа, C — урегулированная копериодическая группа. Если $\eta: A \to C$ — гомоморфизм и $\operatorname{Im} \eta$ содержит периодическую часть группы C, то η — эпиморфизм.

2. Пусть A, C — урегулированные копериодические группы и S, T — их периодические части.

(а) Существует естественный изоморфизм

$$\operatorname{Hom}(A, C) \cong \operatorname{Hom}(S, T).$$

(б) $\operatorname{Hom}(A, C)$ — алгебраически компактная группа.

(в) Всякий гомоморфизм группы S в группу T может быть единственным образом продолжен до гомоморфизма группы A в группу C.

3. Пусть G — урегулированная копериодическая группа и T — ее периодическая часть. Соответствие $\alpha \mapsto \alpha \mid T$ является изоморфизмом между группами автоморфизмов групп G и T.

4. Редуцированная копериодическая группа является урегулированной тогда и только тогда, когда для каждого простого числа p ее p-базисная подгруппа периодическая.

5. Если G — урегулированная копериодическая группа с периодической частью T, то $|G| \leqslant |T|^{\aleph_0}$.

6. Пусть G — урегулированная копериодическая группа и $T = T_1 \oplus T_2$ — прямое разложение ее периодической части. Тогда существует такое прямое разложение $G = G_1 \oplus G_2$, что $T(G_i) = T_i$ $(i = 1, 2)$.

7. Доказать лемму 55.3 для случая, когда $C = Q/Z$ и A — редуцированная группа, используя сервантно инъективную резольвенту $0 \to A \to G \to G/A \to 0$ и, следовательно, получая изоморфизм $\operatorname{Pext}(Q/Z, A) \cong \operatorname{Hom}(Q/Z, G/A)$.

8. Пусть G — урегулированная копериодическая группа и T — ее периодическая часть. Показать, что или $G = T$, или G/T — несчетная группа. [*Указание*: существует эпиморфизм группы $G/T \cong \cong \operatorname{Ext}(Q, T)$ на группу $\operatorname{Hom}(Q, \hat{T}/T)$, где $\hat{T}$ есть Z-адическое пополнение группы T.]

§ 56. Ульмовские факторы копериодических групп

Теорема 55.6 утверждает, что урегулированная копериодическая группа G вполне определяется своей периодической частью T, поэтому [уже известные и пока еще не открытые] инварианты группы G должны выражаться в терминах группы T. Напомним, что по теореме 54.3 ульмовские факторы группы G являются алгебраически компактными группами, а алгебраически компактные группы могут быть описаны с помощью инвариантов, являющихся кардинальными числами, так что естественно поставить вопрос, как эти инварианты на самом деле зависят от группы T. Данный параграф посвящен этому вопросу.

При рассмотрении ульмовских факторов важную роль играет следующий результат, который представляет собой некоторое усиление теоремы, полученной Ирвином и др. [1].

Предложение 56.1. *Пусть B — подгруппа σ-й ульмовской подгруппы A^σ группы A, и пусть $0 \to B \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A/B \to 0$ — точная последовательность. Тогда образ гомоморфизма α_*: $\operatorname{Ext}(G, B) \to \operatorname{Ext}(G, A)$ содержится в σ-й ульмовской подгруппе $\operatorname{Ext}(G, A)^\sigma$ группы $\operatorname{Ext}(G, A)$ и последовательность*

$$0 \to \operatorname{Hom}(G, B) \to \operatorname{Hom}(G, A) \to \operatorname{Hom}(G, A/B) \to$$
$$\to \operatorname{Ext}(G, B) \xrightarrow{\alpha_*} \operatorname{Ext}(G, A)^\sigma \xrightarrow{\beta_*} \operatorname{Ext}(G, A/B)^\sigma \to 0$$

точна для любой группы G.

Пусть $0 \to H \to F \to G \to 0$ — свободная резольвента группы G. Тогда из теоремы 51.3 получается, что имеет место следующая коммутативная диаграмма с точными строками:

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Hom}(H, B) & \xrightarrow{\varphi} & \operatorname{Ext}(G, B) & \to & \operatorname{Ext}(F, B) = 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha'_*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \\ \operatorname{Hom}(H, A) & \xrightarrow{\psi} & \operatorname{Ext}(G, A) & \to & \operatorname{Ext}(F, A) = 0 \end{array}$$

[здесь φ и ψ — связывающие гомоморфизмы]. Наше первое утверждение состояло в том, что $\operatorname{Im}\alpha_* \subseteq \operatorname{Ext}(G, A)^\sigma$. Чтобы это доказать, заметим, во-первых, что $\operatorname{Im}\alpha_* = \operatorname{Im}\alpha_*\varphi = \operatorname{Im}\psi\alpha'_*$. Группа H свободна, поэтому $\operatorname{Im}\alpha'_*$ содержится в σ-й ульмовской подгруппе группы $\operatorname{Hom}(H, A) \cong \prod A$, а эта подгруппа при ψ, очевидно, отображается в σ-ю ульмовскую подгруппу группы $\operatorname{Ext}(G, A)$.

Так как гомоморфизм β_*: Ext $(G, A) \to$ Ext $(G, A/B)$ отображает σ-ю ульмовскую подгруппу в σ-ю ульмовскую подгруппу, нам остается только доказать, что каждое расширение $E \in$ Ext $(G, A/B)^\sigma$ является образом некоторого элемента E' группы Ext $(G, A)^\sigma$. Из теоремы 51.3 мы знаем, что существует такое расширение $E' \in$ Ext (G, A), что $\beta_* E' = E$. Так как Ker $\beta_* \subseteq$ Ext $(G, A)^\sigma$, то теорема 37.1 показывает, что никакой элемент, лежащий вне группы Ext $(G, A)^\sigma$, не может отобразиться в σ-ю ульмовскую подгруппу группы Im β_*. Следовательно, $E' \in$ Ext $(G, A)^\sigma$. ■

Следствие 56.2. *При предположениях предложения* 56.1 ρ*-е ульмовские факторы групп* Ext (G, A) *и* Ext $(G, A/B)$ *изоморфны для любого* $\rho < \sigma$.

Используя теорему 53.1 и предложение 56.1, получаем [например, из 3×3-леммы], что факторгруппа Ext(G, A)/Ext $(G, A)^\sigma$ изоморфна факторгруппе Ext $(G, A/B)$/Ext $(G, A/B)^\sigma$. Теперь утверждение очевидно. ■

В качестве первого шага установим связь между ульмовской длиной периодической группы T и ульмовской длиной соответствующей урегулированной копериодической группы G.

Предложение 56.3. *Если T — редуцированная периодическая группа ульмовской длины σ, то группа* Ext $(Q/Z, T) = G$ *имеет ульмовскую длину σ или $\sigma + 1$, подгруппа G^σ является группой без кручения и существует естественный изоморфизм*

$$G^\sigma \cong \text{Hom}\,(Q/Z,\ G/(G^\sigma + T)).$$

Так как $T \subseteq G$, то ясно, что ульмовская длина группы G не может быть меньше σ. Очевидно, $G^\sigma \cap T = T^\sigma = 0$, поэтому G^σ — группа без кручения. По следствию 54.5 эта группа алгебраически компактна, поэтому ее первая ульмовская подгруппа равна нулю, т. е. $G^{\sigma+1} = 0$. Последовательность $0 \to T \to G/G^\sigma \to G/(G^\sigma + T) \to 0$ точна, а $G/(G^\sigma + T)$ — делимая группа как эпиморфный образ группы G/T [см. лемму 55.1]. Следовательно, по теореме 51.3 получаем точную последовательность

$$0 \to \text{Hom}\,(Q/Z,\ G/(G^\sigma + T)) \to \text{Ext}\,(Q/Z,\ T) \cong$$
$$\cong G \to \text{Ext}\,(Q/Z,\ G/G^\sigma) \cong G/G^\sigma \to 0$$

[последний изоморфизм имеет место, так как G/G^σ — редуцированная копериодическая группа]. Отображение между двумя группами Ext является естественным, поэтому из естественности изоморфизмов следует, что ядром этого отображения служит G^σ. Этим все доказано. ■

В качестве следующего шага выведем формулу для ульмовских подгрупп группы G [эта формула будет уточнена в предложении 56.5].

Предложение 56.4. *Если T — редуцированная периодическая группа, то для любого порядкового числа* σ

$$\operatorname{Ext}(Q/Z, T)^\sigma \cong \operatorname{Ext}(Q/Z, T^\sigma) \oplus \operatorname{Ext}(Q/Z, T/T^\sigma)^\sigma. \qquad (2)$$

По предложению 56.1 получаем точную последовательность $0 \to \operatorname{Ext}(Q/Z, T^\sigma) \to \operatorname{Ext}(Q/Z, T)^\sigma \to \operatorname{Ext}(Q/Z, T/T^\sigma)^\sigma \to 0$. Первая группа здесь является копериодической, а последняя в силу предложения 56.3 — группой без кручения, поэтому последовательность расщепляется. ■

Предложение 56.5 (Харрисон [3]). *Пусть T — периодическая группа, σ — порядковое число. Тогда*

$$\operatorname{Ext}(Q/Z, T/T^\sigma)^\sigma \cong \operatorname{Hom}(Q/Z, H_\sigma),$$

где $H_\sigma \cong \hat{T}_{\sigma-1}/T_{\sigma-1}$ [через $\hat{T}_{\sigma-1}$ обозначено Z-адическое пополнение группы $T_{\sigma-1}$], если $\sigma - 1$ существует, а если $\sigma - 1$ не существует, то H_σ — это факторгруппа обратного предела $L_\sigma = \varprojlim T/T^\rho$ $(\rho < \sigma)$ по его подгруппе T/T^σ.

Применим предложение 56.4 к $\sigma - 1$ и возьмем ульмовские подгруппы. Тогда по предложению 56.3 мы получим $\operatorname{Ext}(Q/Z, T)^\sigma \cong \operatorname{Ext}(Q/Z, T^{\sigma-1})^1$. Снова по предложению 56.4 последняя группа изоморфна прямой сумме $\operatorname{Ext}(Q/Z, T^\sigma) \oplus \operatorname{Ext}(Q/Z, T_{\sigma-1})^1$, где второе слагаемое изоморфно группе $\operatorname{Hom}(Q/Z, \hat{T}_{\sigma-1}/T_{\sigma-1})$ в силу следствия 53.8. Учитывая то, что группа $\operatorname{Ext}(Q/Z, T^\sigma)$ является урегулированной частью группы $\operatorname{Ext}(Q/Z, T)^\sigma$, получаем нужный изоморфизм для случая, когда σ — не предельное порядковое число.

Если σ — предельное порядковое число, то имеем естественные вложения группы T/T^σ в $\varprojlim T/T^\rho$ и группы G/G^σ в $\varprojlim G/G^\rho$ $(\rho < \sigma)$, что дает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T/T^\sigma & \to & \varprojlim T/T^\rho & \to & L_\sigma & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & G/G^\sigma & \to & \varprojlim G/G^\rho & \to & K_\sigma & \to & 0 \end{array}$$

где строки точны, а вертикальные отображения [первое из них действует естественным образом, как следует из того, что $T/T^\sigma \to (G^\sigma + T)/G^\sigma \subseteq G/G^\sigma$] — мономорфизмы. Так как средняя группа в нижней строке является редуцированной копериодической группой [см. утверждение Е) § 54] и так как то же верно для группы G/G^σ, то, согласно утверждению Б) § 54, группа K_σ также должна быть редуцированной. Следовательно, если перейти к факторгруппе по подгруппе $(G^\sigma + T)/G^\sigma$, то получится, что делимая часть группы $(\varprojlim G/G^\rho)/[(G^\sigma + T)/G^\sigma]$ содержится в образе группы $\varprojlim T/T^\rho$ в этой группе, а он, очевидно, изоморфен L_σ. Так как $(G/G^\sigma)/[(G^\sigma + T)/G^\sigma] \cong G/(G^\sigma + T)$, остается применить предложение 56.3. ■

Итак, у нас накоплена обширная информация об ульмовских подгруппах группы Ext $(Q/Z, T)$. Описание ульмовских факторов получается посредством следующей леммы.

Лемма 56.6. *Если T — периодическая группа и $T^1 = 0$, то*

$$\mathrm{Ext}\,(Q/Z,\ T)_0 \cong \hat{T},$$

где индекс при группе Ext *обозначает ульмовский фактор группы* Ext.

Из леммы 55.1 и предложения 56.3 следует, что периодическая часть группы Ext $(Q/Z, T)_0$ содержит группу T в качестве подгруппы, причем соответствующая факторгруппа является делимой группой. Так как T — сервантная подгруппа группы Ext $(Q/Z, T)$, то легко видеть, что она остается сервантной и в Ext $(Q/Z, T)_0$, а по теореме 54.3 эта последняя группа является полной. Следовательно, T — сервантная и плотная подгруппа группы Ext $(Q/Z, T)_0$, а эта группа должна быть Z-адическим пополнением $\hat{T}$ группы T. ∎

Теорема 56.7 (Харрисон [3]). *Пусть T — редуцированная периодическая группа и σ — порядковое число. Для σ-го ульмовского фактора группы* Ext $(Q/Z, T)$ *имеет место соотношение*

$$\mathrm{Ext}\,(Q/Z,\ T)_\sigma \cong \hat{T}_\sigma \oplus \mathrm{Hom}\,(Q/Z,\ H_\sigma),$$

где группа H_σ определена в предложении 56.5.

Нулевой ульмовский фактор группы $G = \mathrm{Ext}\,(Q/Z, T)$ изоморфен нулевому ульмовскому фактору группы Ext $(Q/Z, T_0)$, а этот последний изоморфен группе $\hat{T}_0$ [см. следствие 56.2 и лемму 56.6]. Из предложения 56.4 следует, что σ-й ульмовский фактор группы G изоморфен прямой сумме нулевого ульмовского фактора группы Ext $(Q/Z, T^\sigma)$ и группы, изоморфной в силу предложения 56.5 группе Hom $(Q/Z, H_\sigma)$. По уже доказанному нулевой ульмовский фактор группы Ext $(Q/Z, T^\sigma)$ изоморфен Z-адическому пополнению нулевого ульмовского фактора T_σ группы T^σ. ∎

Упражнения

1. Доказать аналог предложения 56.1, где подгруппы X^σ везде заменены на $p^\sigma X$.

2. Для периодической группы T эквивалентны следующие условия:
(1) Ext $(Q/Z, T)$ — алгебраически компактная группа;
(2) Ext $(Q/Z, T) \cong \hat{T}$;
(3) группа T является периодической частью алгебраически компактной группы.

3. Пусть G — редуцированная копериодическая группа и T — ее периодическая часть. Первая ульмовская подгруппа G^1 группы G

является урегулированной копериодической группой тогда и только тогда, когда $(G^1 + T)/G^1$ служит периодической частью для G/G^1.

4. Построить копериодическую группу длины ω, все ульмовские подгруппы которой являются урегулированными.

5. Описать ульмовские факторы группы $\mathrm{Ext}(Q/Z, A)$, где A — группа из примера § 35.

6. Если T и T' — периодические группы с изоморфными базисными подгруппами, то нулевые ульмовские факторы групп $\mathrm{Ext}(Q/Z, T)$ и $\mathrm{Ext}(Q/Z, T')$ изоморфны.

7. Построить неизоморфные редуцированные копериодические группы (длины 2), соответствующие ульмовские факторы которых изоморфны. [*Указание*: пусть B — прямая сумма групп $Z(p^n)$, $n = 1, 2, \ldots$, а T — такая сервантная подгруппа периодической части $\overline{B}$ прямого произведения групп $Z(p^n)$, что $B \subset T$ и $|\overline{B} : T| = |T : B| = 2^{\aleph_0}$; доказать, что группы $\mathrm{Ext}(Q/Z, B)$ и $\mathrm{Ext}(Q/Z, T)$ — искомые группы.]

§ 57*. Приложения к группам Ext

Изучение копериодических групп открывает путь к изучению групп расширений. Основная проблема, конечно, состоит в нахождении строения группы $\mathrm{Ext}(C, A)$ в зависимости от строения групп A и C. Мы знаем, что решение этой проблемы существенно зависит от определения строения периодической части группы $\mathrm{Ext}(C, A)$. Так как наши сведения о периодических группах в основном ограничиваются случаем счетных групп [см. гл. XII], то дать точное описание группы Ext в общем случае невозможно.

Первое, что мы сделаем, чтобы охарактеризовать группу $\mathrm{Ext}(C, A)$ с помощью групп A и C, будет состоять в нахождении инвариантов ульмовских факторов этой группы. Это не трудно сделать для нулевого ульмовского фактора, но для следующих ульмовских факторов соответствующие инварианты не известны.

Приводимая ниже лемма является основной.

Лемма 57.1 (Харрисон [3]). *Если E: $0 \to A \to B \to C \to 0$ — сервантно точная последовательность, то для любой группы G индуцированные последовательности нулевых ульмовских факторов*

$$0 \to \mathrm{Ext}(C, G)_0 \to \mathrm{Ext}(B, G)_0 \to \mathrm{Ext}(A, G)_0 \to 0, \quad (1)$$

$$0 \to \mathrm{Ext}(G, A)_0 \to \mathrm{Ext}(G, B)_0 \to \mathrm{Ext}(G, C)_0 \to 0 \quad (2)$$

точны и расщепляются.

Из теоремы 51.3 вытекает точность последовательности $0 \to \mathrm{Ext}(C, G)/\mathrm{Im}\, E^* \to \mathrm{Ext}(B, G) \to \mathrm{Ext}(A, G) \to 0$, из теоремы 53.7 — точность последовательности $0 \to \mathrm{Pext}(C, G)/\mathrm{Im}\, E^* \to \mathrm{Pext}(B, G) \to \mathrm{Pext}(A, G) \to 0$, поэтому точность последовательности (1) является простым следствием 3×3-леммы. В силу леммы 53.5 первая из указанных последовательностей сервантно точна,

поэтому последовательность (1) также сервантно точна. Группы, входящие в последовательность (1), алгебраически компактны, поэтому последовательность (1) расщепляется. Утверждение, касающееся последовательности (2), доказывается аналогично. ∎

Доказанная лемма позволяет охарактеризовать нулевой ульмовский фактор группы Ext (C, A) с помощью инвариантов групп A и C.

Теорема 57.2 (Маклейн [2], Харрисон [3]). *Пусть A, C — произвольные группы, и пусть $T(A)$, $T(C)$ и $T_b(A)$, $T_b(C)$ обозначают соответственно их периодические части и базисные подгруппы их периодических частей. Тогда*

$$\mathrm{Ext}(C, A)_0 \cong \mathrm{Ext}(T_b(C), T_b(A)) \oplus \mathrm{Ext}(T_b(C), A/T(A)) \oplus$$
$$\oplus\, \mathrm{Ext}(T(C)/T_b(C), T_b(A))_0 \oplus \mathrm{Ext}(T(C)/T_b(C), A/T(A)), \quad (3)$$

где все алгебраически компактные группы, входящие в правую часть, могут быть описаны с помощью инвариантов групп A и C.

К сервантно точным последовательностям, возникающим в силу наличия мономорфизмов $T_b(A) \to T(A)$, $T(A) \to A$, применяем несколько раз лемму 57.1 и то же делаем для группы C. Если вспомнить, что Ext $(J, *)$, где J — группа без кручения, является делимой группой и Ext $(*, D) = 0$, если D — делимая группа, то получится нужный изоморфизм, только при каждой группе будет стоять индекс 0. Так как группа $T_b(C)$ является прямой суммой циклических групп, то Pext $(T_b(C), *) = 0$, а также Pext $(T(C)/T_b(C), A/T(A)) = 0$ в силу теоремы 52.3. Отсюда получается требуемый изоморфизм.

Чтобы пояснить наше дополнительное утверждение, заметим, что $T_b(C)$ — прямая сумма циклических групп порядков p^n, откуда следует, что группа Ext $(T_b(C), G)$ — прямое произведение групп G/p^nG. Кроме того, группа $T(C)/T_b(C)$ является прямой суммой групп типа p^∞, поэтому Ext $(T(C)/T_b(C), T_b(A))_0$ — прямое произведение p-адических пополнений групп $T_b(A)$ [см. лемму 56.6], и то же самое имеет место для последнего слагаемого в формуле (3), как следует из п. H) § 52. ∎

Мы теперь хотим изучить группу Pext (C, A), т. е. первую ульмовскую подгруппу группы Ext (C, A). Все, что известно об этой группе, содержится в теореме 57.4.

Лемма 57.3 (Харрисон [3]). *Если группа A обладает свойством $A^1 = 0$, то имеет место точная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Pext}(C_0, A) \to \mathrm{Pext}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C^1, \hat{A}/A) \to 0.$$

Так как последовательность $0 \to C^1 \to C \to C_0 \to 0$ точна, а последовательность $0 \to A \to \hat{A} \to \hat{A}/A \to 0$ [где $\hat{A}/A$ — делимая группа] сервантно точна, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to \operatorname{Hom}(C_0, \hat{A}) & \xrightarrow{\varkappa} & \operatorname{Hom}(C, \hat{A}) & & \\
\mu \downarrow & & \downarrow \lambda & & \\
0 \to \operatorname{Hom}(C_0, \hat{A}/A) & \xrightarrow{\nu} & \operatorname{Hom}(C, \hat{A}/A) & \to \operatorname{Hom}(C^1, \hat{A}/A) \to 0 & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\operatorname{Pext}(C_0, A) & \to & \operatorname{Pext}(C, A) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\operatorname{Pext}(C_0, \hat{A}) = 0 & & \operatorname{Pext}(C, \hat{A}) = 0 & &
\end{array}$$

где строки и столбцы точны в силу предложения 44.5 и теоремы 53.7 и две нижние группы обращаются в нуль в силу алгебраической компактности группы $\hat{A}$. Первая ульмовская подгруппа группы $\hat{A}$ равна нулю и, таким образом, всякий гомоморфизм $C \to \hat{A}$ индуцируется некоторым гомоморфизмом $C_0 \to \hat{A}$, т. е. $\varkappa$ — изоморфизм. Следовательно, верхняя строка останется точной, если мы припишем к ней справа $\to 0$. Мы также можем пополнить третью строку, добавив к ней $\to \operatorname{Hom}(C^1, \hat{A}/A)$; этот гомоморфизм существует, так как группы $\operatorname{Pext}(C, A)$ и $\operatorname{Hom}(C^1, \hat{A}/A)$ являются эпиморфными образами группы $\operatorname{Hom}(C, \hat{A}/A)$ с ядрами $\operatorname{Im} \lambda$ и $\operatorname{Im} \nu$, причем $\operatorname{Im} \lambda = \operatorname{Im} \lambda\varkappa = \operatorname{Im} \nu\mu \subseteq \operatorname{Im} \nu$. Точность нужной нам последовательности теперь следует из 3×3-леммы [в доказательстве леммы 2.4 отображения λ_1 и μ_1 могут не быть мономорфизмами]. ∎

Теорема 57.4 (Маклейн [2], Харрисон [3]). *Для любых групп A и C группа* $\operatorname{Pext}(C, A)$ *содержит две такие подгруппы* $K(C, A) \subseteq L(C, A)$, *что*

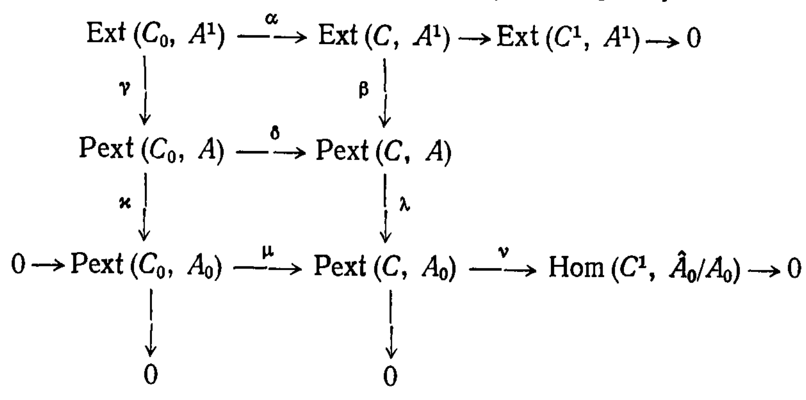
$$\operatorname{Pext}(C, A)/L(C, A) \cong \operatorname{Hom}(C^1, \hat{A}_0/A_0)$$
$$L(C, A)/K(C, A) \cong \operatorname{Pext}(C_0, A_0) \oplus \operatorname{Ext}(C^1, A^1).$$

Если нулевой ульмовский фактор C_0 группы C является прямой суммой циклических групп, то

$$K(C, A) = 0 \quad \text{и} \quad L(C, A) \cong \operatorname{Ext}(C^1, A^1).$$

Возьмем точные последовательности $0 \to C^1 \to C \to C_0 \to 0$ и $0 \to A^1 \to A \to A_0 \to 0$. Тогда в силу теоремы 51.3, предложения 56.1

и леммы 57.3 мы получим коммутативную диаграмму



с точными строками и столбцами. Пусть $K(C, A) = \mathrm{Im}\,\beta\alpha$ и $L(C, A) = \mathrm{Ker}\,\nu\lambda$. Тогда первый изоморфизм очевиден. Как в лемме 8.3, получается, что $L(C, A) = \mathrm{Im}\,\beta + \mathrm{Im}\,\delta$. Очевидно, $K(C, A) \subseteq \mathrm{Im}\,\beta \cap \mathrm{Im}\,\delta$. Если $x \in \mathrm{Im}\,\beta \cap \mathrm{Im}\,\delta$ и, скажем, $x = \delta y$ [где $y \in \mathrm{Pext}(C_0, A)$], то $0 = \lambda x = \lambda\delta y = \mu\varkappa y$ и $\varkappa y = 0$, $y \in \mathrm{Im}\,\gamma$, т. е. $x \in \mathrm{Im}\,\delta\gamma = K(C, A)$. Таким образом, $\mathrm{Im}\,\beta \cap \mathrm{Im}\,\delta = K(C, A)$. Следовательно, $L(C, A)/K(C, A)$ является прямой суммой группы $\mathrm{Im}\,\beta/\mathrm{Im}\,\beta\alpha \cong \mathrm{Ext}(C^1, A^1)$ и группы $\mathrm{Im}\,\delta/\mathrm{Im}\,\delta\gamma \cong \mathrm{Pext}(C_0, A_0)$.

Если C_0 — прямая сумма циклических групп, то $\mathrm{Pext}(C_0, *) = 0$, откуда второе утверждение сразу следует. ∎

К сожалению, теорема 57.4 не может считаться удовлетворительной по двум причинам. Во-первых, в этой теореме ничего не говорится о подгруппе $K(C, A)$. Во-вторых, даже если C_0 — прямая сумма циклических групп и, таким образом, $K(C, A) = 0$, у нас имеется мало сведений о возникающей здесь точной последовательности

$$0 \to \mathrm{Ext}(C^1, A^1) \to \mathrm{Pext}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C^1, \hat{A}_0/A_0) \to 0,$$

и описания первого ульмовского фактора группы $\mathrm{Ext}(C, A)$ не получается. Если предположить, что C — редуцированная счетная периодическая группа [тогда все ее ульмовские факторы — прямые суммы циклических групп в силу теоремы 17.3], то можно повторить рассуждения для групп $\mathrm{Ext}(C^n, A^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и получить последовательность алгебраически компактных факторгрупп вида (3) и $\mathrm{Hom}(C^n, \hat{A}_{n-1}/A_{n-1})$.

Упражнения

1. Пусть C есть p-группа, а B есть p-базисная подгруппа группы A. Доказать, что

$$\mathrm{Ext}(C, A)_0 \cong \mathrm{Ext}(C, B)_0.$$

2. Группа $\mathrm{Ext}(C, A)_0$ является прямым слагаемым прямого произведения групп вида A/p^nA. [*Указание*: начать с сервантно проективной резольвенты группы C, затем использовать лемму 57.1.]

3. Выразить в явном виде кардинальные инварианты группы $\mathrm{Ext}(C, A)_0$ через инварианты групп A и C, используя теорему 57.2.

4. (а) Пусть группы A и C таковы, что $A^1 = 0$, а C^1 — делимая группа. Показать, что

$$\mathrm{Pext}(C, A) \cong \mathrm{Pext}(C_0, A) \oplus \mathrm{Hom}(C^1, \hat{A}/A).$$

(б) (Харрисон [3]). Если C^1 — делимая группа, то теорема 57.4 может быть упрощена следующим образом:

$$\mathrm{Pext}(C, A)/K(C, A) \cong \mathrm{Pext}(C_0, A_0) \oplus \mathrm{Ext}(C^1, A^1) \oplus \mathrm{Hom}(C^1, \hat{A}/A).$$

5. Определить кардинальные инварианты алгебраически компактной группы $\mathrm{Hom}(C^1, \hat{A}/A)$ для периодической группы C.

6. Показать, что если C есть p-группа и C_0 — прямая сумма циклических групп, то группа $\mathrm{Ext}(C^1, A^1)$ изоморфна некоторой группе, лежащей между группами $\mathrm{Ext}(C, A)^2$ и $\mathrm{Ext}(C, A)^1$.

§ 58. Свойства инъективности копериодических групп

Напомним, что алгебраически компактные группы можно охарактеризовать как группы, обладающие свойством инъективности по отношению к классу сервантно точных последовательностей. Мы хотим сейчас отметить, что копериодические группы могут быть охарактеризованы аналогичным образом. Кроме того, всякая группа обладает «копериодической оболочкой».

Следующий результат уже известен нам в случае периодических групп A. Его доказательство в основном является повторением доказательства леммы 55.1.

Теорема 58.1. *Всякую группу A можно вложить в копериодическую группу G так, что G/A будет делимой группой без кручения. Если группа A редуцированная, то группу G можно также выбрать редуцированной.*

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда группа A редуцированная. Как в лемме 55.1, получаем точную последовательность $0 \to A \to \mathrm{Ext}(Q/Z, A) \to \mathrm{Ext}(Q, A) \to 0$, где $\mathrm{Ext}(Q, A)$ — делимая группа без кручения. Если теперь положить $G = \mathrm{Ext}(Q/Z, A)$, то группа G будет редуцированной копериодической в силу теоремы 54.6 и леммы 55.3. Отсюда получается искомый результат. ∎

Назовем точную последовательность $E\colon 0 \to A \to B \to C \to 0$ *периодически расщепляющейся*, если расщепляется последовательность $E\tau$, где $\tau\colon T \to C$ — вложение, а $T = T(C)$ — периодическая часть.

группы C. Если C — группа без кручения или если последовательность E расщепляется, то E тривиальным образом является периодически расщепляющейся последовательностью.

Теорема 58.2. *Группа G является копериодической тогда и только тогда, когда она инъективна относительно периодически расщепляющихся точных последовательностей.*

Предположим сначала, что группа G копериодическая. Если $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точная последовательность, где C — группа без кручения, то из существования индуцированной точной последовательности $\operatorname{Hom}(B, G) \to \operatorname{Hom}(A, G) \to \operatorname{Ext}(C, G) = 0$ следует, что всякий гомоморфизм $A \to G$ продолжается до некоторого гомоморфизма $B \to G$, т. е. группа G инъективна относительно такой точной последовательности. Если E — какая-то периодически расщепляющаяся точная последовательность и η: $A \to G$ — гомоморфизм, то η можно продолжить до гомоморфизма χ: $B' \to G$, где B' — полный прообраз периодической части T группы C. Из точности последовательности $0 \to B' \to B \to C/T \to 0$ и доказанного выше следует, что χ продолжается до гомоморфизма группы B в группу G.

Обратно, пусть группа G инъективна относительно периодически расщепляющихся точных последовательностей. По теореме 58.1 существует точная последовательность $0 \to G \to G^* \to D \to 0$, где G^* — копериодическая группа, а D — делимая группа без кручения. Так как группа G инъективна относительно этой последовательности, то G служит прямым слагаемым для группы G^* и, следовательно, является копериодической группой. ∎

Существует простой способ, позволяющий внутри группы $\operatorname{Ext}(C, A)$ найти те расширения группы A при помощи группы C, которые представляют периодически расщепляющиеся точные последовательности.

Предложение 58.3. *Точная последовательность E: $0 \to A \to B \to C \to 0$ является периодически расщепляющейся тогда и только тогда, когда она — элемент из максимальной делимой подгруппы группы* $\operatorname{Ext}(C, A)$.

Так как $0 \to T \to C \to C/T \to 0$ [где $T = T(C)$] — точная последовательность, то точна последовательность

$$\operatorname{Ext}(C/T, A) \to \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(T, A) \to 0.$$

Первая группа здесь является делимой в силу утверждения И) из § 52, а по лемме 55.3 третья группа редуцированная. Точная последовательность E является периодически расщепляющейся тогда и только тогда, когда она имеет нулевой образ в группе $\operatorname{Ext}(T, A)$, т. е. когда она лежит в образе группы $\operatorname{Ext}(C/T, A)$. Но это как раз максимальная делимая подгруппа группы $\operatorname{Ext}(C, A)$. ∎

Вследствие теоремы 58.2 теореме 58.1 можно дать другую интерпретацию. Именно, теорема 58.1 показывает, что для любой группы A

существует периодически расщепляющаяся точная последовательность $0 \to A \to G \to G/A \to 0$, где G [и G/A] — копериодическая группа, т. е. существует «достаточно» объектов, инъективных относительно периодически расщепляющихся точных последовательностей. Естественно возникает вопрос о существовании минимальных инъективных в этом смысле объектов. Для простоты ограничимся рассмотрением редуцированных групп A. Положим

$$A^{\bullet} = \operatorname{Ext}(Q/Z, A).$$

Из доказательства теоремы 58.1 видно, что существует естественный мономорфизм $\mu\colon A \to A^{\bullet}$, в силу чего, если нужно, группу A можно отождествить с подгруппой группы $A^{\bullet}$, причем такой, что $A^{\bullet}/A$ — делимая группа без кручения. В силу утверждения 3) из § 54 ясно, что μ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда группа A копериодическая. Кроме того, $A^{\bullet\bullet} = A^{\bullet}$ для любой группы A.

Лемма 58.4 (Ротман [1]). *Пусть A и B — редуцированные группы. Каждый гомоморфизм $\eta\colon A \to B$ можно единственным образом продолжить до гомоморфизма $\eta^{\bullet}\colon A^{\bullet} \to B^{\bullet}$.*

Из точности последовательности $0 \to A \xrightarrow{\mu} A^{\bullet} \to A^{\bullet}/A \to 0$ вытекает точность последовательности

$$0 = \operatorname{Hom}(A^{\bullet}/A, B^{\bullet}) \to \operatorname{Hom}(A^{\bullet}, B^{\bullet}) \xrightarrow{\mu^*} \operatorname{Hom}(A, B^{\bullet}) \to \operatorname{Ext}(A^{\bullet}/A, B^{\bullet}) = 0.$$

Так как отображение μ^* сюръективно, композиция отображений $A \xrightarrow{\eta} B \xrightarrow{\nu} B^{\bullet}$ индуцируется некоторым гомоморфизмом $\eta^{\bullet} \in \operatorname{Hom}(A^{\bullet}, B^{\bullet})$ [это следует также из теоремы 58.2]. Так как μ^* — мономорфизм, гомоморфизм $\eta^{\bullet}$ определен однозначно. ∎

Заметим, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta} & B \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu} \\ A^{\bullet} & \xrightarrow{\eta^{\bullet}} & B^{\bullet} \end{array}$$

где вертикальные отображения являются естественными вложениями, коммутативна.

Предложение 58.5. *Если $E\colon 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — периодически расщепляющаяся точная последовательность редуцированных групп, то последовательность*

$$E^{\bullet}\colon 0 \to A^{\bullet} \xrightarrow{\alpha^{\bullet}} B^{\bullet} \xrightarrow{\beta^{\bullet}} C^{\bullet} \to 0$$

точна и расщепляется.

Точность последовательности $E^{\bullet}$ вытекает из точности последовательности E и теоремы 51.3, п. (3), где $G = Q/Z$. Расщепляемость будет вытекать из теоремы 58.2, если мы покажем, что последовательность $E^{\bullet}$ периодически расщепляющаяся. Имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \operatorname{Ext}(C, A) \\ & & & & \downarrow \mu_* \\ 0 = \operatorname{Ext}(C^{\bullet}/C, A^{\bullet}) & \to & \operatorname{Ext}(C^{\bullet}, A^{\bullet}) & \xrightarrow{\lambda^*} & \operatorname{Ext}(C, A^{\bullet}) \to 0 \end{array}$$

с точной строкой, где отмеченные отображения индуцируются естественными гомоморфизмами из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} E\colon & 0 \to & A & \to & B & \to & C & \to 0 \\ & & \downarrow \mu & & \downarrow \nu & & \downarrow \lambda & \\ E^{\bullet}\colon & 0 \to & A^{\bullet} & \to & B^{\bullet} & \to & C^{\bullet} & \to 0 \end{array}$$

Последовательность $E^{\bullet}$ получается из последовательности E путем применения отображения μ_* и затем отображения, обратного изоморфизму λ^*. Если E принадлежит максимальной делимой подгруппе группы $\operatorname{Ext}(C, A)$, то $E^{\bullet}$ принадлежит максимальной делимой подгруппе группы $\operatorname{Ext}(C^{\bullet}, A^{\bullet})$. ∎

Пусть A — редуцированная группа, и пусть G — такая редуцированная копериодическая группа, что $A \subseteq G$. Из предложения 58.5 мы имеем, что $A^{\bullet} \subseteq G^{\bullet} = G$, откуда следует, что $A^{\bullet}$ — минимальная редуцированная копериодическая группа, содержащая группу A, причем $A^{\bullet}$ содержится во всякой редуцированной копериодической группе, содержащей группу A. Поэтому группу $A^{\bullet}$ можно рассматривать как *копериодическую оболочку* группы A. Если A — не редуцированная группа и D — ее максимальная делимая подгруппа, то $D \oplus A^{\bullet}$ является копериодической оболочкой группы A. Очевидно, копериодическая оболочка определена однозначно с точностью до изоморфизма над A.

Далеко идущие щобобения иекоторых результатов этого параграфа были получены Ирвином, К. Уокер и Э. Уокером [1] и особенно Нунке [3].

Упражнения

1. Доказать, что $0 \to A \to B \to C \to 0$ есть периодически расщепляющаяся точная последовательность тогда и только тогда, когда индуцированная последовательность

$$0 \to T(A) \to T(B) \to T(C) \to 0$$

периодических частей соответствующих групп точна и расщепляется.

2. (а) Доказать, что точная последовательность является периодически расщепляющейся в точности тогда, когда относительно этой последовательности периодические группы проективны.

(б) Группа проективна относительно всех периодически расщепляющихся точных последовательностей тогда и только тогда, когда она является прямой суммой свободной группы и периодической группы.

3 (Ирвин, Уокер К. и Уокер Э. [1]). Доказать, что если последовательность $0 \to A \to B \to C \to 0$ точна и расщепляется, то последовательности (4) и (5) из теоремы 53.7, где Pext заменено максимальной делимой подгруппой группы Ext, точны.

4. (а) Нулевой ульмовский фактор группы $A^{\bullet}$ является пополнением нулевого ульмовского фактора группы A. [*Указание*: см. теорему 57.2.]

(б) Для последующих ульмовских факторов это уже не так.

5. Если $A \subseteq G$, где G — редуцированная копериодическая группа и G/A — делимая группа без кручения, то группа G изоморфна над A группе $A^{\bullet}$.

6. Проверить справедливость неравенства

$$|A^{\bullet}| \leqslant |A|^{\aleph_0}.$$

7 (Меджиббен). Доказать теорему 58.1 для редуцированных групп A так: рассмотреть все группы H со свойствами 1) $A \subseteq H$, 2) $|H| \leqslant |A|^{\aleph_0}$, 3) H/A — делимая группа без кручения, 4) H — редуцированная группа; выбрать среди этих групп максимальную.

8 (Рангасвами [1]). (а) При фиксированной группе A группа $\operatorname{Ext}(C, A)$ является редуцированной для любой группы C тогда и только тогда, когда A — копериодическая группа.

(б) При фиксированной группе C группа $\operatorname{Ext}(C, A)$ является редуцированной для любой группы A тогда и только тогда, когда C — прямая сумма свободной группы и периодической группы.

Замечания

Из четырех основных функторов, рассматриваемых в гомологической алгебре, наибольшее внимание теоретико-групповиков до сих пор привлекал функтор Ext. Частично это объясняется тем, что всякая группа является некоторой группой Hom и некоторым тензорным произведением, а всякая периодическая группа является некоторой группой Tor; класс же групп, которые могут быть группами Ext, более ограничен [хотя всякая редуцированная периодическая группа может быть периодической частью некоторой группы Ext]; при этом класс групп Ext имеет ряд интересных свойств. Другая причина заключается в том, что некоторые проблемы теории абелевых групп удобнее рассматривать, если сформулировать их в терминах расширений.

Если R — произвольное кольцо, то для всякого $n \geqslant 1$ существует функтор Ext^n_R, причем точные последовательности в теореме 51.3 становятся бесконечными и содержат по три сходных члена для каждого n. Теорема 51.3 остается справедливой тогда и только тогда, когда кольцо R наследственно слева. Группа Ext всегда абелева; она является R-модулем, если кольцо R коммутативно. Таким образом, лемма 52.1 — это очень частный случай более общего утверждения относительно действия кольца R на группу Ext.

Как уже отмечалось, копериодические группы были открыты независимо Харрисоном [1], Нунке [1] и Фуксом [9]. Их название было введено Харрисоном,

который при этом дополннтельно предполагал, что они редуцированные. Он же ввел функтор Pext н опублнковал теорему 53.7. Теорема 53.3 была доказана Нунке [1] для дедекиндовых колец. Тот основной факт, что группа Ext всегда является копериоднческой, обычно выводится из наличия изоморфизма

$$\mathrm{Ext}(A, \mathrm{Ext}(B, C)) \cong \mathrm{Ext}(\mathrm{Tor}(A, B), C),$$

который имеет место в случае модулей над наследственными кольцами. Тот факт, что группа Ext (C, A) редуцированная для периодических групп C, вытекает из формулы

$$\mathrm{Ext}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \oplus \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Ext}(B, C)) \cong \cong \mathrm{Ext}(A \otimes B, C) \oplus \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}(A, B), C),$$

справедливой над коммутатнвнымн наследственнымн кольцами. Это следствня из теоремы об универсальных коэффициентах. В тексте даны незавнсимые доказательства.

Существуют различные обобщения леммы 53.6 и теоремы 53.7. Важиейшее из ннх относится к случаю, когда последовательность (1) в § 53 представляет элемент из SExt (C, A), где S — подфунктор тождественного функтора (см. Нунке [3]). Другое обобщение, в духе § 45, см. в работе Фукса [12].

Копериодические модули над коммутативными областями целостности изучались Матлисом [Matlise E., *Mem. Amer. Math. Soc.*, № 49 (1964)]. О функторе пополнення, соответствующем отображению $G \mapsto \mathrm{Ext}(Q/Z, G)$, над дедекиндовыми кольцами см. работу Ротмана [1].

Проблема 38. Оценить число неизоморфных расширений группы A при помощи группы C в терминах групп A и C.

Проблема 39. Определить инварианты делимой группы Ext (C, A) для группы без кручения C.

Проблема 40. Описать строение группы Ext (C, A). В частности, определить ульмовскую длину группы Ext (C, A).

Проблема 41. Охарактеризовать элементы группы Ext (C, A), представляющие такие расширения G, что для некоторого заданного порядкового числа σ группа A лежит в σ-й ульмовской подгруппе группы G.

Проблема 42 (Бэр). Задать группу Ext (C, A) аксиоматически как функцию групп A и C.

Проблема 43. Как связаны между собой группы C и C', если Ext $(C, A) \cong$ Ext (C', A) для любой группы A [или Ext $(A, C) \cong$ Ext (A, C') для любой группы A]?

Проблема 44. Исследовать группы A со следующим свойством: если группа A содержится в прямой сумме редуцированных групп, то существует такое натуральное число n, что nA содержится в прямой сумме конечного числа этих групп.

Заметнм, что копериодические группы, пернодически полные группы [см. § 67] и прямые произведения бесконечных цикличеческих групп обладают этнм свойством [см. теорему 39.9].

Проблема 45. Построить теорию (счетных) прямых сумм копериодических групп.

Проблема 46. Найти условия на класс групп, при которых он является классом всех инъективных [проективных] объектов относительно некоторого класса точных последовательностей.

Глава X

ТЕНЗОРНЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Существует другой основной бифунктор, значение которого сравнимо со значением функтора Hom: это тензорное произведение. Как будет видно из результатов этой главы, тензорные произведения играют роль, в некотором смысле двойственную роли групп гомоморфизмов.

Тензорные произведения определяются с помощью образующих и определяющих соотношений. Они являются универсальными по отношению к билинейным функциям, и это свойство делает их особенно важными. Точная последовательность для тензорных произведений, которая будет получена в § 60, так же важна, как точные последовательности для Hom. В то время как функтор Hom точен слева, тензорное произведение оказывается точным справа; точность может быть восстановлена, если использовать функтор Tor [периодическое произведение].

Если одна из групп периодическая, то тензорное произведение таких групп можно полностью описать. В частности, тензорное произведение двух периодических групп всегда есть прямая сумма циклических групп. Проблема выяснения строения периодического произведения является более трудной, но в последнее время было получено много различных результатов о группе Tor.

§ 59. Тензорное произведение

Пусть A и C — произвольные группы и g — функция, определенная на множестве $A \times C$ и принимающая значения в некоторой группе G,

$$g\colon A \times C \to G. \qquad (1)$$

Функция g называется *билинейной*, если для любых элементов a, a_1, $a_2 \in A$, c, c_1, $c_2 \in C$

$$g(a_1 + a_2, c) = g(a_1, c) + g(a_2, c), \qquad (2)$$

$$g(a, c_1 + c_2) = g(a, c_1) + g(a, c_2). \qquad (3)$$

Отсюда сразу следует, что билинейная функция g удовлетворяет также следующим условиям: $g(a, 0) = 0 = g(0, c)$, $g(-a, c) = -g(a, c) = g(a, -c)$, $g(na, c) = ng(a, c) = g(a, nc)$ для любых элементов $a \in A$, $c \in C$ и любого $n \in \mathbf{Z}$. Следовательно, если известны значения функции $g(a_i, c_j)$ для всех элементов a_i, c_j, принадлежащих некоторым системам образующих групп A и C соответственно, то значение $g(a, c)$ может быть определено для любых $a \in A$, $c \in C$.

Для заданных групп A, C определим так группу $A \otimes C$ и билинейную функцию e с областью определения $A \times C$ и с областью значений в $A \otimes C$, чтобы функция e была наиболее общей билинейной функцией в том смысле, что если (1) — какая-то билинейная функция,

то существует однозначно определенный гомоморфизм $\varphi\colon A \otimes C \to G$, для которого $g = \varphi e$. Другими словами, всякая билинейная функция (1) должна «пропускаться через функцию e».

Пусть X — свободная группа, свободными образующими которой являются все пары (a, c), где $a \in A$, $c \in C$, и пусть Y — подгруппа группы X, порожденная элементами вида

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c) \text{ и } (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2) \quad (4)$$

для всех $a, a_1, a_2 \in A$, $c, c_1, c_2 \in C$. Положим

$$A \otimes C = X/Y$$

и обозначим смежный класс $(a, c) + Y$ через $a \otimes c$. Таким образом, $A \otimes C$ состоит из всех конечных сумм $u = \sum k_i (a_i \otimes c_i)$, где $a_i \in A$, $c_i \in C$, $k_i \in \mathbf{Z}$, причем выполняются правила [соответствующие образующим группы Y]:

$$(a_1 + a_2) \otimes c = a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \quad (5)$$
$$a \otimes (c_1 + c_2) = a \otimes c_1 + a \otimes c_2. \quad (6)$$

Следовательно,

$$na \otimes c = n (a \otimes c) = a \otimes nc$$

для любых $a \in A$, $c \in C$, $n \in \mathbf{Z}$. Мы видим, что элементы $u \in A \otimes C$ могут быть записаны в виде $u = \sum (a_i \otimes c_i)$ $(a_i \in A,\ c_i \in C)$, но, вообще, элемент u записывается в таком виде многими различными способами.

Заметим, что тензорное произведение $A \otimes_{\mathbf{R}} C$ правого $\mathbf{R}$-модуля A и левого $\mathbf{R}$-модуля C определяется аналогичным образом, но в факторгруппе X/Y [где X — абелева группа, свободно порождаемая всеми парами (a, c)] подгруппа Y порождается, кроме элементов вида (4), также всеми элементами $(a\alpha, c) - (a, \alpha c)$, где $a \in A$, $c \in C$ и $\alpha \in \mathbf{R}$.

К сожалению, обозначение $a \otimes c$ не всегда вполне ясно, так как элемент $a \otimes c$ зависит также от групп A, C; поэтому всегда нужно пояснять, к какому тензорному произведению элемент $a \otimes c$ принадлежит [см. упр. 6].

В силу формул (5) и (6) отображение

$$e\colon (a, c) \mapsto a \otimes c$$

есть билинейная функция $A \times C \to A \otimes C$. Если (1) — какая-то билинейная функция, то докажем, что существует однозначно определенный гомоморфизм $\varphi\colon A \otimes C \to G$, превращающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A \times C & \xrightarrow{e} & A \otimes C \\ & g \searrow \quad \swarrow \varphi & \\ & G & \end{array} \quad (7)$$

в коммутативную. Если такой гомоморфизм φ существует, то, очевидно, $\varphi\colon a \otimes c \mapsto g(a, c)$, так что φ обязательно определен однозначно

Но отображение $a \otimes c \mapsto g(a, c)$ образующих группы $A \otimes C$ в группу G продолжается до гомоморфизма, так как образующие связаны только соотношениями (5), (6) [и следствиями из них], которыми связаны и соответствующие образы, как показывают формулы (2) и (3). Это завершает доказательство первой части следующей теоремы:

Теорема 59.1. *Если дана пара групп A, C, то существуют такая группа $A \otimes C$ и такая билинейная функция*

$$e\colon A \times C \to A \otimes C,$$

что если $g\colon A \times C \to G$ — какая-то билинейная функция, то имеется единственный гомоморфизм $\varphi\colon A \otimes C \to G$, для которого диаграмма (7) *коммутативна.*

Указанное свойство определяет группу $A \otimes C$ однозначно с точностью до изоморфизма.

Чтобы доказать последнее утверждение, предположим, что группа H обладает таким же свойством, причем соответствующей билинейной фунцией является функция $h\colon A \times C \to H$. Тогда в силу доказанного для группы $A \otimes C$ существует такой гомоморфизм $\varphi\colon A \otimes C \to H$, что $h = \varphi e$, а по нашему предположению относительно группы H для некоторого гомоморфизма $\psi\colon H \to A \otimes C$ имеет место равенство $e = \psi h$. Следовательно, $e = \psi\varphi e$, $h = \varphi\psi h$, а так как существует только один гомоморфизм $\psi\varphi\colon A \otimes C \to A \otimes C$, для которого $e = \psi\varphi e$, то $\psi\varphi = 1_{A \otimes C}$, и аналогично $\varphi\psi = 1_H$. ∎

Группа $A \otimes C$ называется *тензорным произведением* групп A и C, а отображение $e\colon (a, c) \mapsto a \otimes c$ называется *тензорным отображением*. В силу единственности, о которой идет речь в предыдущей теореме, получается, что

$$A \otimes C \cong C \otimes A,$$

причем естественный изоморфизм индуцируется соответствием $a \otimes c \mapsto c \otimes a$.

Чтобы ознакомиться с тензорными произведениями, установим сначала ряд элементарных фактов. Следующая, почти тривиальная лемма дает нам удобный метод получения свойств тензорных произведений.

Лемма 59.2. а) *Если $m \mid a$ и $n \mid c$, то $mn \mid a \otimes c$*; б) *если $ma = 0$ и $nc = 0$, то $(m, n)(a \otimes c) = 0$*; в) *если $m \mid a$ и $mc = 0$, то $a \otimes c = 0$.*

Если для элементов $a_0 \in A$, $c_0 \in C$ выполнены соотношения $ma_0 = a$, $nc_0 = c$, то $mn(a_0 \otimes c_0) = a \otimes c$. Если s, t — такие целые числа, что $ms + nt = (m, n)$, то $(m, n)(a \otimes c) = msa \otimes c + a \otimes ntc = 0$. Наконец, утверждение в) вытекает из того, что $a \otimes c = ma_0 \otimes c = a_0 \otimes mc = 0$. ∎

А) *Если либо группа A, либо группа C является p-делимой [делимой], то $A \otimes C$ есть p-делимая [делимая] группа.*

Б) *Для высот элементов справедливо*

$$h_p(a \otimes c) \geqslant h_p(a) + h_p(c).$$

В) *Если либо группа A, либо группа C является p-группой [периодической группой], то $A \otimes C$ есть p-группа [периодическая группа].*

Г) *Если A есть p-делимая группа, а C есть p-группа, то $A \otimes C = 0$.*

В частности, $A \otimes C = 0$, если A есть p-группа, а C есть q-группа, где p, q — различные простые числа. Кроме того, $A \otimes C = 0$, если A — делимая, а C — периодическая группа.

Д) *Если при некотором $m \in \mathbf{Z}$ имеют место включения $a \in mA$ и $c \in C[m]$, то $a \otimes c = 0$ в группе $A \otimes C$.*

Е) *Если $h_p(a) = \infty$, а C есть p-группа, то $a \otimes c = 0$ в группе $A \otimes C$ для любого элемента $c \in C$.*

Доказательства очевидны и могут быть предоставлены читателю.

Ж) *Существует естественный изоморфизм*

$$Z \otimes C \cong C.$$

Элементы группы $Z \otimes C$ могут быть приведены к виду $\sum (n_i \otimes c_i) = \sum (1 \otimes n_i c_i) = 1 \otimes \sum n_i c_i = 1 \otimes c$ для некоторого элемента $c \in C$. Отображение φ: $c \mapsto 1 \otimes c$ является поэтому эпиморфизмом группы C на группу $Z \otimes C$. Очевидно, $(m, c) \mapsto mc$ есть билинейное отображение $Z \times C \to C$, поэтому в силу теоремы 59.1 существует такой гомоморфизм ψ: $Z \otimes C \to C$, что ψ: $1 \otimes c \mapsto c$. Следовательно, отображения φ и ψ взаимно обратны. [Заметим, что отображение φ является естественным, так как группа Z имеет особо выделенную образующую.]

З) *Для любого целого числа m существует естественный изоморфизм*

$$Z(m) \otimes C \cong C/mC.$$

Здесь снова φ: $c \mapsto 1 \otimes c$ является эпиморфизмом группы C на группу $Z(m) \otimes C$. Так как $1 \otimes mc = m \otimes c = 0 \otimes c = 0$, то $mC \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$. Далее, $(n, c) \mapsto nc + mC$ — это билинейное отображение $Z(m) \times C \to C/mC$, индуцирующее такой эпиморфизм ψ: $Z(m) \otimes C \to C/mC$, что $\psi\varphi$ является каноническим отображением $C \to C/mC$. Следовательно, $\operatorname{Ker} \varphi = mC$.

В частности, $Z(p^r) \otimes Z(p^s) \cong Z(p^t)$, где $t = \min(r, s)$.

И) *Пусть группы A и C являются прямыми суммами, $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, $C = \bigoplus_{j \in J} C_j$. Тогда*

$$A \otimes C \cong \bigoplus_{i,j} (A_i \otimes C_j).$$

Очевидно, достаточно проверить, что $A \otimes C \cong \bigoplus_i (A_i \otimes C)$. Если π_i — проекции, связанные с заданным прямым разложением группы A, то функция $g(a, c) = \sum_i (\pi_i a \otimes c)$, очевидно, является билинейной функцией $A \times C \to G = \bigoplus_i (A_i \otimes C)$, причем $\pi_i a \otimes c \in A_i \otimes \otimes C$. Следовательно, существует однозначно определенный гомоморфизм φ: $A \otimes C \to G$, для которого $g(a, c) = \varphi e(a, c)$, где e — тензорное отображение $A \times C \to A \otimes C$. Гомоморфизм φ является эпиморфизмом, так как элементы $\pi_i a \otimes c$ порождают группу G. Функция $e(\pi_i a, c)$, определенная на $A_i \times C$, является билинейной, поэтому при каждом i существует гомоморфизм ψ_i: $A_i \otimes C \to A \otimes C$, для которого $\psi_i(\pi_i a \otimes c) = e(\pi_i a, c)$. Гомоморфизмы ψ_i дают гомоморфизм ψ: $G \to A \otimes C$, для которого $\psi g(a, c) = \psi \sum_i (\pi_i a \otimes c) = \sum_i \psi_i (\pi_i a \otimes c) = \sum_i e(\pi_i a \otimes c) = e(a, c)$. Мы получаем, что отображение ψ обратно отображению φ, следовательно, φ — мономорфизм, т. е. изоморфизм.

Следствием утверждений И) и Ж) является то, что если A и C — свободные группы со свободными образующими $\{a_i\}_{i \in I}$ и $\{c_j\}_{j \in J}$ соответственно, то $A \otimes C$ — тоже свободная группа со свободными образующими $\{a_i \otimes c_j\}$, где $i \in I$, $j \in J$.

К) *Для любых трех групп A, B, C имеет место естественный изоморфизм*

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \to \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)),$$

определяемый следующим образом: если η: $A \otimes B \to C$, *то*

$$[(\varphi\eta)\, a](b) = \eta(a \otimes b) \quad (a \in A,\ b \in B).$$

Очевидно, $\varphi\eta$ сопоставляет элементу $a \in A$ отображение $(\varphi\eta)\, a$: $B \to C$, которое переводит элемент $b \in B$ в элемент $\eta(a \otimes b) \in C$. Легко проверить, что $(\varphi\eta)\, a$ — гомоморфизм. Точно так же, $\varphi\eta$ — гомоморфизм и φ: $\eta \mapsto \varphi\eta$ — гомоморфизм, и остается доказать, что для φ существует обратное отображение ψ. Пусть χ: $A \to \mathrm{Hom}(B, C)$. Тогда $(a, b) \mapsto (\chi a)(b)$ есть билинейная функция g: $A \times B \to C$, откуда следует, что существует однозначно определенный гомоморфизм η: $A \otimes B \to C$, для которого $\eta(a \otimes b) = (\chi a)(b)$. Легко видеть, что отображение ψ: $\chi \mapsto \eta$ является обратным к φ.

Упражнения

1 (Уитней [1]). Пусть A, C, G — аддитивные, но не обязательно коммутативные группы, и пусть g: $A \times C \to G$ — билинейная функция. Доказать, что

(а) значения $g(a, c)$ порождают абелеву подгруппу G' группы G [*указание*: рассмотреть $g(a_1 + a_2, c_1 + c_2)$];

(б) $g(a_1, c) = g(a_2, c)$, если элементы a_1 и a_2 принадлежат одному смежному классу по коммутанту группы A;

(в) предположение коммутативности не накладывает ограничений на билинейные функции.

2. Охарактеризовать группы C, для которых выполняется одно из следующих условий:

(а) $A \otimes C \cong A$ для любой группы A;

(б) $A \otimes C \cong A/mA$ для фиксированного числа m и любой группы A;

(в) $A \otimes C$ — делимая группа для любой группы A;

(г) $A \otimes C = 0$ для любой периодической группы A;

(д) $A \otimes C = 0$ для любой p-группы A;

(е) $A \otimes C = 0$ для любой делимой группы A;

(ж) $A \otimes C$ — периодическая группа для любой группы A.

3. Пусть элемент $a \in A$ таков, что $a \otimes c = 0$ в $A \otimes C$ для любой периодической группы C и любого элемента $c \in C$. Доказать, что $a \in A^1$.

4. (а) Определить строение группы $A \otimes C$, если A — прямая сумма циклических групп.

(б) $A \otimes C \cong \mathrm{Hom}(A, C)$, если A и C — конечные группы.

5. Пусть группа A обладает тем свойством, что для любой группы C тензорное произведение $A \otimes C$ является прямой суммой фактор-групп группы C. Показать, что A — прямая сумма циклических групп.

6. (а) Если $A' \subseteq A$ и $C' \subseteq C$, то отображение $a' \otimes c'$ $(\in A' \otimes C') \mapsto (a' \otimes c')$ $(\in A \otimes C)$ индуцирует гомоморфизм

$$\varphi\colon A' \otimes C' \to A \otimes C.$$

(б) Привести пример, когда φ — не мономорфизм. [*Указание*: взять $A' = Z(p)$, $A = Z(p^\infty)$.]

7. (а) Если $\sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes c_i) = 0$ в группе $A \otimes C$ при некоторых $a_i \in A$, $c_i \in C$, то существуют такие конечно порожденные подгруппы $A' \subseteq A$, $C' \subseteq C$, что $a_i \in A'$, $c_i \in C'$ и $\sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes c_i) = 0$ в группе $A' \otimes C'$.

(б) Проверить справедливость утверждения, аналогичного утверждению (а), где «$= 0$» заменено условием «имеет порядок m».

8. Определить *полилинейные функции* $g\colon A_1 \times \ldots \times A_n \to G$, тензорное произведение $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ и тензорное отображение e. Доказать аналог теоремы 59.1 и ассоциативность

$$(A_1 \otimes A_2) \otimes A_3 \cong A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \cong A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3).$$

9. Пусть B — подгруппа, порожденная всеми эпиморфными образами группы A в группе C. Тогда существует эпиморфизм $A \otimes \mathrm{Hom}(A, C) \to B$.

10. Существует естественный гомоморфизм

$$A \otimes \prod C_i \to \prod (A \otimes C_i),$$

который в общем случае не является изоморфизмом. [*Указание*: взять $A = Q$, а в качестве C_i взять неограниченные периодические группы.]

§ 60. Точные последовательности для тензорных произведений

В этом параграфе мы посмотрим, как тензорные произведения ведут себя в качестве бифункторов. Поэтому наша первая задача — определить для $\otimes$ индуцированные гомоморфизмы.

Пусть α: $A \to A'$ и γ: $C \to C'$ — гомоморфизмы. Отображение $(a, c) \mapsto \alpha a \otimes \gamma c$ из $A \times C$ в $A' \otimes C'$, очевидно, является билинейным, поэтому существует однозначно определенный гомоморфизм φ: $A \otimes C \to A' \otimes C'$, для которого $\varphi(a \otimes c) = \alpha a \otimes \gamma c$. Введем обозначение $\varphi = \alpha \otimes \gamma$. Тогда

$$(\alpha \otimes \gamma)(a \otimes c) = \alpha a \otimes \gamma c \quad (a \otimes c \in A \otimes C,\ \alpha a \otimes \gamma c \in A' \otimes C').$$

Для упрощения обозначений мы будем иногда, если это не сможет вызвать недоразумений, просто писать

$$\alpha_* = \alpha \otimes 1_C, \quad \gamma_* = 1_A \otimes \gamma.$$

Легко непосредственно проверить, что выполняются правила

$$1_A \otimes 1_C = 1_{A \otimes C}, \qquad (\alpha \otimes \gamma)(\alpha' \otimes \gamma') = \alpha\alpha' \otimes \gamma\gamma',$$
$$(\alpha + \alpha_1) \otimes \gamma = \alpha \otimes \gamma + \alpha_1 \otimes \gamma, \quad \alpha \otimes (\gamma + \gamma_1) = \alpha \otimes \gamma + \alpha \otimes \gamma_1,$$

где α, α', α_1, γ, γ', γ_1 — соответствующие гомоморфизмы. Поэтому мы приходим к первой части следующего результата:

Теорема 60.1 (Картан и Эйленберг [1]). *Тензорное произведение является аддитивным бифунктором из категории $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{A}$, ковариантным по обоим аргументам. Этот бифунктор коммутирует с прямыми пределами.*

Чтобы доказать последнее утверждение, предположим, что $\mathbf{A} = \{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^k\}$ и $\mathbf{C} = \{C_j\ (j \in J);\ \rho_j^l\}$ — прямые спектры с пределами A и C соответственно. Система

$$\{A_i \otimes C_j\ ((i, j) \in I \times J);\ \pi_i^k \otimes \rho_j^l\}$$

снова является прямым спектром; пусть G — ее предел. Из существования канонических отображений π_i: $A_i \to A$, ρ_j: $C_j \to C$ следует существование таких гомоморфизмов

$$\pi_i \otimes \rho_j: A_i \otimes C_j \to A \otimes C,$$

что $\pi_i \otimes \rho_j = (\pi_k \otimes \rho_l)(\pi_i^k \otimes \rho_j^l)$ $(i \leqslant k;\ j \leqslant l)$. По теореме 11.1 существует однозначно определенный гомоморфизм σ: $G \to A \otimes C$, для которого $\sigma\sigma_{ij} = \pi_i \otimes \rho_j$ при всех i, j, где σ_{ij}: $A_i \otimes C_j \to G$ — каноническое отображение. Мы утверждаем, что σ — изоморфизм. Если даны элементы $a \in A$, $c \in C$, то $a = \pi_i a_i$, $c = \rho_j c_j$ для некоторых $a_i \in A_i$, $c_j \in C_j$ и функция $g(a, c) = \sigma_{ij}(a_i \otimes c_j)$ билинейна. Следовательно, для некоторого гомоморфизма τ: $A \otimes C \to G$ выполнено равенство $\tau(a \otimes c) = g(a, c)$. Далее, $a \otimes c = (\pi_i \otimes \rho_j)(a_i \otimes c_j) = \sigma\sigma_{ij}(a_i \otimes c_j) = \sigma g(a, c)$ показывает, что σ и τ — взаимно обратные отображения на образующих групп $A \otimes C$ и G. ∎

Следствием этой теоремы является тот факт, что *если* $\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes c_i)$ *обращается в нуль в группе* $A \otimes C$, *то существуют такие конечно порожденные подгруппы* A', C', *что* $a_i \in A'$, $c_i \in C'$ *и* $\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes c_i)$ *обращается в нуль уже в группе* $A' \otimes C'$. В самом деле, это вытекает из теоремы 60.1 и утверждения в) из § 11.

Если мы хотим посмотреть, как ведут себя тензорные произведения по отношению к коротким точным последовательностям, мы можем в силу симметрии ограничиться тензорным умножением справа. Следующий результат показывает, что функтор $\otimes$ точен справа:

Теорема 60.2 (Картан и Эйленберг [1]). *Если* $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — *точная последовательность и* G — *произвольная группа, то индуцированная последовательность*

$$A \otimes G \xrightarrow{\alpha_*} B \otimes G \xrightarrow{\beta_*} C \otimes G \to 0$$

точна.

Из равенства $\beta\alpha = 0$ следует, что $\beta_*\alpha_* = (\beta\alpha)_* = 0$. Нам нужно только доказать, что гомоморфизм

$$\varphi\colon H = (B \otimes G)/\operatorname{Im}\alpha_* \to C \otimes G,$$

индуцированный гомоморфизмом β_*, является изоморфизмом. Пусть дан элемент $c \in C$. Возьмем такой элемент $b \in B$, что $\beta b = c$. Отображение $(c, g) \mapsto (b \otimes g) + \operatorname{Im}\alpha_* \in H$, очевидно, определено корректно и является билинейным, поэтому существует такой гомоморфизм ψ: $C \otimes G \to H$, что $\psi(c \otimes g) = (b \otimes g) + \operatorname{Im}\alpha_*$. Теперь ясно, что φ и ψ взаимно обратны на образующих. ∎

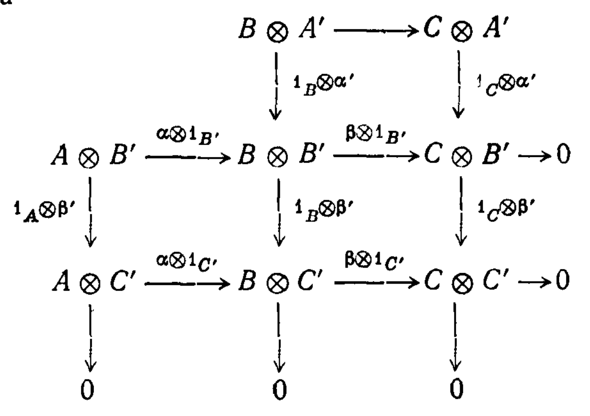
Повторно применяя последний результат, получаем, что если β: $B \to C$ и β': $B' \to C'$ — эпиморфизмы, то $\beta \otimes \beta'$: $B \otimes B' \to C \otimes C'$ — снова эпиморфизм. Можно доказать несколько больше:

Следствие 60.3. *Если* $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ *и* $A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \to 0$ — *точные последовательности, то последовательность*

$$(A \otimes B') \oplus (B \otimes A') \xrightarrow{\xi} B \otimes B' \xrightarrow{\beta \otimes \beta'} C \otimes C' \to 0,$$

где $\xi = [\nabla(\alpha \otimes 1_{B'}) \oplus (1_B \otimes \alpha')]$, *также точна.*

Диаграмма



коммутативна и имеет точные строки и столбцы. Поэтому отображение $\beta \otimes \beta' = (1 \otimes \beta')(\beta \otimes 1)$ является эпиморфизмом, ядро которого представляет собой объединение ядер $\operatorname{Ker}(\beta \otimes 1_{B'})$ и $\operatorname{Ker}(1_B \otimes \beta')$, как легко показать с помощью диаграммного поиска [см. лемму 8.3]. Это объединение совпадает с $\operatorname{Im} \xi$. ∎

По отношению к сервантно точным последовательностям тензорные произведения ведут себя лучше:

Теорема 60.4 (Фукс [9]). *Если* $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — *сервантно точная последовательность, то для любой группы* G *последовательность*

$$0 \to A \otimes G \xrightarrow{\alpha_*} B \otimes G \xrightarrow{\beta_*} C \otimes G \to 0 \qquad (1)$$

сервантно точна.

Если $G = Z$, то это следует из утверждения Ж) § 59. Если $G = Z(m)$, то последовательность (1) сервантно точна в силу естественного изоморфизма из пункта З) § 59 и теоремы 29.1. Следовательно, утверждение теоремы верно для любых конечно порожденных групп G, так как тензорное умножение — аддитивный функтор. Если представить группу G в виде прямого предела ее конечно порожденных подгрупп G_i, то прямым пределом сервантно точных последовательностей $0 \to A \otimes G_i \to B \otimes G_i \to C \otimes G_i \to 0$ в силу теоремы 29.4 будет сервантно точная последовательность $0 \to A \otimes G \to B \otimes G \to C \otimes G \to 0$. Непосредственные выкладки и теорема 11.2 показывают, что отображениями здесь должны быть $\alpha \otimes 1_G$ и $\beta \otimes 1_G$. ∎

Так же доказывается

Следствие 60.5. *Если* $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ *есть p-сервантно точная последовательность, а G есть p-группа, то* (1) — *сервантно точная последовательность.*

В самом деле, если последовательность (1) p-сервантно точна, то она и сервантно точна, так как $B \otimes G$ есть p-группа. ∎

Повторно применяя теорему 60.4, получаем, что если A' и B' — сервантные подгруппы групп A и B соответственно, то группу $A' \otimes B'$ фактически можно рассматривать как подгруппу группы $A \otimes B$ [эта подгруппа получается при естественном отображении $a' \otimes b'$ $(\in A' \otimes$ $\otimes B') \mapsto a' \otimes b'$ $(\in A \otimes B)$]. Другим случаем, когда это возможно, является случай групп без кручения A, B. Это вытекает из следующей теоремы:

Теорема 60.6 (Дьедонне [1]). *Если* $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — *точная последовательность и G — группа без кручения, то последовательность* (1) *точна.*

Доказательство проводится в основном так же, как в теореме 60.4, только теперь G — прямой предел [конечно порожденных] свободных групп. ∎

Отсюда получается, что тензорное произведение групп без кручения является группой без кручения.

Упражнения

1. (а) Если A — группа без кручения, то $Q \otimes A$ — делимая оболочка группы A, причем $a \mapsto 1 \otimes a$ — естественное вложение группы A в $Q \otimes A$.

(б) Так не получится, если A не есть группа без кручения.

2. Если α: $A \to B$ — такой мономорфизм, что $\alpha \otimes 1_G$: $A \otimes G \to$ $\to B \otimes G$ является мономорфизмом для любой группы G, то $\operatorname{Im} \alpha$ — сервантная подгруппа группы B.

3. Последовательность $0 \to A \to B \to C \to 0$ является сервантно точной тогда и только тогда, когда для любого натурального числа m индуцированная последовательность

$$0 \to A \otimes Z(m) \to B \otimes Z(m) \to C \otimes Z(m) \to 0$$

точна.

4. Если A' и C' — сервантные подгруппы групп A и C соответственно, то при естественном вложении $A' \otimes C'$ в $A \otimes C$ получается сервантная подгруппа группы $A \otimes C$.

5. Если всегда из точности последовательности $0 \to A \to B \to C \to$ $\to 0$ следует точность последовательности $0 \to A \otimes G \to B \otimes G \to$ $\to C \otimes G \to 0$, то G — группа без кручения.

6. Если α — эндоморфизм группы A, а γ — эндоморфизм группы C, то $\alpha \otimes 1$ и $1 \otimes \gamma$ — эндоморфизмы группы $A \otimes C$, коммутирующие между собой.

7. Если или A, или C есть p-адическая группа, то $A \otimes C$ есть p-адическая группа. Если π — целое p-адическое число, то $\pi (a \otimes c) = \pi a \otimes c$ или $\pi (a \otimes c) = a \otimes \pi c$ в зависимости от того, что имеет смысл.

8. (а) Пусть A и C — группы без кручения и $\{a_i\}_{i \in I}$, $\{c_j\}_{j \in J}$ — их максимальные независимые системы элементов соответственно. Показать, что $\{a_i \otimes c_j\}_{i, j}$ — максимальная независимая система элементов группы $A \otimes C$.

(б) Проверить равенство

$$r_0 (A \otimes C) = r_0 (A) \cdot r_0 (C)$$

для любых групп A и C.

9. (а) Пусть A, C — группы без кручения, и пусть $p^t \mid a \otimes c$ для некоторых $a \in A$, $c \in C$. Тогда существуют такие неотрицательные целые числа r, s, что $r + s = t$ и $p^r \mid a$, $p^s \mid c$. [*Указание*: см. упр. **8** (а).]

(б) Описать строение группы $A \otimes C$ в случае, когда A, C — группы без кручения ранга 1.

10. Найти строение следующих тензорных произведений: $J_p \otimes Q$; $J_p \otimes J_q$, где p, q — произвольные простые числа; $J_p \otimes C$, где C — периодическая группа.

11 (Хэд [1]). Если A — подгруппа группы B и G — редуцированная группа, то канонический гомоморфизм $A \otimes G \to B \otimes G$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $A \cap p^n B = p^n A$ всякий раз, когда группа G имеет прямое слагаемое $Z(p^n)$.

12. Доказать теорему 60.4, используя теорему 29.6 и функтор $A \mapsto A \otimes G$, $\alpha \mapsto \alpha \otimes 1_G$.

§ 61. Строение тензорных произведений

В заключение рассмотрим строение тензорных произведений в случае, когда один из множителей является периодической группой. Здесь вопрос решается до конца.

Следующая теорема дает инструмент для фактического определения строения тензорного произведения.

Теорема 61.1 (Фукс [9]). *Если C есть p-группа, а B есть p-базисная подгруппа группы A, то имеет место естественный изоморфизм*

$$A \otimes C \cong B \otimes C.$$

Возьмем p-сервантно точную последовательность $0 \to B \to A \to A/B \to 0$. Тогда в силу следствия 60.5 мы получим точную последовательность

$$0 \to B \otimes C \to A \otimes C \to (A/B) \otimes C \to 0.$$

Здесь A/B есть p-делимая группа, а C есть p-группа, поэтому $(A/B) \otimes \otimes C = 0$, как видно из утверждения Г) § 59. Точность последовательности $0 \to B \otimes C \to A \otimes C \to 0$ равносильна утверждению теоремы. ∎

Если $B = \bigoplus_i \langle b_i \rangle$ — разложение p-базисной подгруппы в прямую сумму циклических групп, то можно написать более точно: $A \otimes C = \bigoplus_i (\langle b_i \rangle \otimes C)$, где слагаемые изоморфны или группе C, или группе C/p^kC в зависимости от того, будет ли $\langle b_i \rangle$ бесконечной циклической группой или циклической группой порядка p^k.

Теорема 61.1 в действительности позволяет определить в явном виде строение тензорного произведения $A \otimes C$ для любой периодической группы C. Если B_p есть p-базисная подгруппа группы A, а C_p есть p-компонента группы C, то

$$A \otimes C \cong \bigoplus_p (A \otimes C_p) \cong \bigoplus_p (B_p \otimes C_p).$$

Заметим, что полученный изоморфизм показывает, в частности, что

$$A \otimes C \cong T(A) \otimes C \oplus (A/T(A)) \otimes C$$

для любой периодической группы C. Справедлив также более общий результат:

Теорема 61.2 (Харрисон [2]). *Если B — сервантная подгруппа группы A и C — периодическая группа, то имеет место изоморфизм*

$$A \otimes C \cong B \otimes C \oplus (A/B) \otimes C.$$

Очевидно, достаточно доказать это для p-групп C. Но если C есть p-группа, то нужное утверждение непосредственно следует из утверждения Ж) § 34 и предыдущей теоремы. ∎

Теорема 61.3 (Фукс [6], Харрисон [1]). *Тензорное произведение периодических групп является прямой суммой циклических групп.*

Пусть A, C — периодические группы, и пусть B, D — базисные подгруппы групп A и C соответственно. Применяем дважды теорему 61.1 и получаем, что $A \otimes C \cong B \otimes D$. Здесь B и D — прямые суммы циклических групп, поэтому в силу утверждений И) и З) из § 59 то же должно иметь место для $B \otimes D$. Очевидно, можно дать явную формулу для $B \otimes D$ с помощью инвариантов групп B и D. ∎

О строении тензорных произведений групп без кручения известно по существу очень мало. Главная проблема, с которой мы здесь сталкиваемся, состоит в нахождении достаточно хорошего способа построения тензорного произведения по его компонентам [так как наши сведения о группах без кручения очень ограничены]. Но даже это представляет непреодолимые трудности, если рассматривать общий случай. Лучшее, что мы можем сделать,— это найти некоторые инварианты для группы $A \otimes C$.

Следствие 61.4. *Если A и C — группы без кручения с p-базисными подгруппами B и D соответственно, то $A \otimes C$ — группа без кручения, p-базисная подгруппа которой изоморфна $B \otimes D$.*

По заключительному замечанию из § 60 группа $A \otimes C$ является группой без кручения. Точная последовательность $0 \to B \to A \to A/B \to 0$ индуцирует точную последовательность

$$0 \to B \otimes C \to A \otimes C \to (A/B) \otimes C \to 0$$

[см. теорему 60.6]. Здесь $(A/B) \otimes C$ есть p-делимая группа без кручения, т. е. p-базисные подгруппы группы $B \otimes C$ одновременно являются p-базисными подгруппами группы $A \otimes C$. Повторяя эти рассуждения, получаем, что $B \otimes D$ есть p-базисная подгруппа группы $A \otimes C$. ∎

Приведем, наконец, результат, касающийся периодических частей и частей без кручения произвольных тензорных произведений.

Теорема 61.5 (Фукс [9]). *Для любых групп A, C имеют место изоморфизмы*

$$T(A \otimes C) \cong [T(A) \otimes T(C)] \oplus [T(A) \otimes C/T(C)] \oplus [A/T(A) \otimes T(C)]$$
$$(A \otimes C)/T(A \otimes C) \cong A/T(A) \otimes C/T(C).$$

В силу следствия 60.3 ядро естественного эпиморфизма

$$A \otimes C \to A/T(A) \otimes C/T(C)$$

является подгруппой группы $A \otimes C$, порожденной подгруппами $A \otimes T(C)$ и $T(A) \otimes C$; как показывает теорема 60.4, эти последние группы действительно можно отождествить естественным образом с подгруппами группы $A \otimes C$. В силу теоремы 61.2, очевидно, здесь $A \otimes T(C) \cong [T(A) \otimes T(C)] \oplus [A/T(A) \otimes T(C)]$ и $T(A) \otimes C \cong [T(A) \otimes T(C)] \oplus [T(A) \otimes C/T(C)]$. Эти группы являются периодическими, а их пересечение равно $T(A) \otimes T(C)$. Теперь утверждение теоремы очевидно. ∎

Упражнения

1. Указать явно вид тензорного произведения двух p-групп, базисные подгруппы которых заданы в явном виде.

2. Пусть $A/T(A)$ — делимая группа. Доказать, что $A \otimes C \cong T(A) \otimes C$ для любой периодической группы C.

3. Редуцированная группа G является периодической тогда и только тогда, когда для любой сервантно точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$ имеет место соотношение $B \otimes G \cong (A \otimes G) \oplus (C \otimes G)$. [*Указание*: выбрать в качестве B свободную группу и взять $C = Q$.]

4. (а) Пусть $Z(p^\infty)$ — подгруппа группы $A \otimes C$. Тогда или группа A, или группа C содержит подгруппу $Z(p^\infty)$.

(б) Установить условия, которым должны удовлетворять группы A и C, чтобы было $A \otimes C \cong Z(p^\infty)$.

5. (а) Для пары групп A, C изоморфизм $A \otimes C \cong Z$ влечет за собой $A \cong Z \cong C$.

(б) Доказать, что обе группы A и C свободны, если $A \otimes C$ — нетривиальная свободная группа. [*Указание*: $Z \otimes C$ является подгруппой.]

6. Если G — урегулированная копериодическая группа, то $Q/Z \otimes \otimes G = 0$.

7. (а) Пусть A — редуцированная алгебраически компактная группа без кручения. Тогда

$$A \cong \mathrm{Hom}(Q/Z, A \otimes Q/Z).$$

[*Указание*: подсчитать тензорное произведение.]

(б) $\hat{A} \cong \mathrm{Hom}(Q/Z, A \otimes Q/Z)$ для Z-адического пополнения $\hat{A}$ группы без кручения A.

8. Пусть A, C — неограниченные прямые суммы циклических p-групп. Показать, что группа $\hat{A} \otimes \hat{C}$ не является алгебраически компактной. [*Указание*: рассмотреть базисную подгруппу.]

9. Пусть у групп A и C первые ульмовские подгруппы являются нулевыми группами. Проверить, что имеет место изоморфизм $(A \otimes \otimes C)^{\wedge} \cong (\hat{A} \otimes \hat{C})^{\wedge}$.

10. Доказать, что ульмовская длина группы $A \otimes C$ не может быть больше ульмовской длины каждой из групп A и C. [*Указание*: из теоремы 61.5 следует, что превышение может быть не больше, чем на единицу; показать, что тогда последний ульмовский фактор не может быть группой без кручения.]

11 (Фукс [9]). *Спариванием* групп A, C в группу G называется билинейная функция $A \times C \to G$. Показать, что спаривания образуют группу, изоморфную группе $\mathrm{Hom}(A \otimes C, G)$, и описать строение этой группы в случае, когда G — группа действительных чисел, рассматриваемых по модулю 1.

§ 62. Периодическое произведение

Мы видели, что в общем случае функтор Hom не переводит короткую точную последовательность снова в точную последовательность, но точность может быть восстановлена, если ввести функтор Ext. На самом деле теорема 51.3 показывает, что этого можно достигнуть, если допустить к рассмотрению более длинные точные последовательности. Можно ожидать, что существует функтор, который действует так же по отношению к тензорному произведению. Именно этот функтор мы сейчас и рассмотрим.

Если даны группы A и C, то их *периодическим произведением* $\mathrm{Tor}(A, C)$ называется абелева группа, образующие которой — все тройки (a, m, c), где $a \in A$, $c \in C$, $m \in \mathbf{Z}$ $(m > 0)$ и $ma = mc = 0$,

а определяющие соотношения —

$$\begin{cases} (a_1+a_2,\ m,\ c)=(a_1,\ m,\ c)+(a_2,\ m,\ c), & \text{если } ma_1=ma_2=mc=0,\\ (a,\ m,\ c_1+c_2)=(a,\ m,\ c_1)+(a,\ m,\ c_2), & \text{если } ma=mc_1=mc_2=0,\\ (a,\ mn,\ c)=(na,\ m,\ c), & \text{если } mna=mc=0,\\ (a,\ mn,\ c)=(a,\ m,\ nc), & \text{если } ma=mnc=0. \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом, предполагается, что соотношения (1) выполнены всякий раз, когда правые части определены. В силу очевидной симметрии

$$\operatorname{Tor}(A,\ C)\cong\operatorname{Tor}(C,\ A),$$

причем имеет место естественный изоморфизм $(a,\ m,\ c)\leftrightarrow(c,\ m,\ a)$.

Из первых двух соотношений в системе (1) вытекает, что $(0,\ m,\ c)=0=(a,\ m,\ 0)$ и $(-a,\ m,\ c)=-(a,\ m,\ c)=(a,\ m,\ -c)$. Кроме того, $(na,\ m,\ c)=n(a,\ m,\ c)=(a,\ m,\ nc)$, если каждый из символов имеет смысл. Очевидно, элементами группы $\operatorname{Tor}(A,\ C)$ являются конечные суммы вида

$$\sum_i (a_i,\ m_i,\ c_i), \text{ где } m_ia_i=m_ic_i=0.$$

Приведем теперь ряд элементарных следствий из определения.

А) $\operatorname{Tor}(A,\ C)$ *всегда является периодической группой. Это p-группа, если p-группой является A или C.*

Б) *Имеет место естественный изоморфизм*

$$\operatorname{Tor}(A,\ C)\cong\operatorname{Tor}(T(A),\ T(C)).$$

В самом деле, в определении группы Tor учитываются только элементы конечного порядка.

Утверждения А) и Б) оправдывают название «периодическое произведение» и в то же время показывают, что мы ничего не теряем, рассматривая только периодические группы. В частности, $\operatorname{Tor}(A,\ C)=0$, если A или C — группа без кручения.

В) *Если $nA=0$, то $n\operatorname{Tor}(A,\ C)=0$ для любой группы C.*

Очевидно, все образующие элементы группы Tor обращаются в нуль при умножении на n.

Г) *Если A есть p-группа, а C есть q-группа, где p, q — различные простые числа, то* $\operatorname{Tor}(A,\ C)=0$.

В самом деле, в этом случае $\operatorname{Tor}(A,\ C)$ одновременно является и p-группой, и q-группой.

Д) Tor *коммутирует с прямыми суммами: если $A=\bigoplus_i A_i$, то существует естественный изоморфизм*

$$\operatorname{Tor}(\bigoplus_i A_i,\ C)\cong\bigoplus_i\operatorname{Tor}(A_i,\ C).$$

Если $(a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}, m, c)$ $(a_i \in A_i)$ — образующий элемент группы $\mathrm{Tor}(A, C)$, то

$$m(a_{i_1}+\ldots+a_{i_k})=0=mc.$$

Это равносильно тому, что $ma_{i_1}=\ldots=ma_{i_k}=mc=0$, поэтому в группе $\mathrm{Tor}(A, C)$ мы имеем $(a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}, m, c)=(a_{i_1}, m, c)+ +\ldots+(a_{i_k}, m, c)$. Очевидно, тройки вида (a_i, m, c), где $a_i \in A_i$, при фиксированном i порождают подгруппу группы $\mathrm{Tor}(A, C)$, изоморфную группе $\mathrm{Tor}(A_i, C)$. Эти подгруппы, взятые для всех i, порождают подгруппу, являющуюся их прямой суммой и совпадающую с группой $\mathrm{Tor}(A, C)$.

Е) *Если p-компоненты групп A и C обозначить через A_p и C_p, то будет иметь место изоморфизм*

$$\mathrm{Tor}(A, C) \cong \bigoplus_p \mathrm{Tor}(A_p, C_p).$$

Это легко получается из Г) и Д).

Чтобы исследовать, является ли Tor функтором, возьмем гомоморфизмы $\alpha\colon A \to A'$ и $\gamma\colon C \to C'$. Совершенно очевидно, что если (a, m, c) — образующий элемент группы $\mathrm{Tor}(A, C)$, то $(\alpha a, m, \gamma c)$ — образующий элемент группы $\mathrm{Tor}(A', C')$, а соответствие

$$(a, m, c) \mapsto (\alpha a, m, \gamma c)$$

между образующими однозначно продолжается до гомоморфизма

$$\mathrm{Tor}(\alpha, \gamma)\colon \mathrm{Tor}(A, C) \to \mathrm{Tor}(A', C').$$

Как и следовало ожидать, для таких гомоморфизмов выполняются обычные правила $\mathrm{Tor}(\alpha\alpha', \gamma\gamma')=\mathrm{Tor}(\alpha, \gamma)\,\mathrm{Tor}(\alpha', \gamma')$ для соответствующих гомоморфизмов и $\mathrm{Tor}(1_A, 1_C)=1_{\mathrm{Tor}(A,C)}$, т. е. Tor — функтор. Таким образом, мы получаем первую часть следующего результата:

Теорема 62.1 (Картан и Эйленберг [1]). *Периодическое произведение является аддитивным бифунктором из категории $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{A}$, ковариантным по обоим аргументам. Он коммутирует с прямыми пределами.*

Остается проверить справедливость второго утверждения. Пусть $\boldsymbol{A}=\{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^k\}$ и $\boldsymbol{C}=\{C_j\ (j \in J);\ \rho_j^l\}$ — прямые спектры групп, пределы которых мы обозначим соответственно через A и C. Легко проверить, что $\{\mathrm{Tor}(A_i, C_j)\ ((i, j) \in I \times J);\ \mathrm{Tor}(\pi_i^k, \rho_j^l)\}$ — прямой спектр; пусть T — его предел и пусть $\sigma_{ij}\colon \mathrm{Tor}(A_i, C_j) \to T$ — соответствующие канонические отображения. Канонические гомоморфизмы $\pi_i\colon A_i \to A$, $\rho_j\colon C_j \to C$ [для которых $\pi_i=\pi_k\pi_i^k$ $(i \leqslant k)$ и $\rho_j= =\rho_l\rho_j^l$ $(j \leqslant l)$] индуцируют гомоморфизмы

$$\mathrm{Tor}(\pi_i, \rho_j)\colon \mathrm{Tor}(A_i, C_j) \to \mathrm{Tor}(A, C),$$

для которых $\operatorname{Tor}(\pi_i, \rho_j) = \operatorname{Tor}(\pi_k, \rho_l)\operatorname{Tor}(\pi_i^k, \rho_j^l)$. Из теоремы 11.1 следует, что существует такой однозначно определенный гомоморфизм $\sigma: T \to \operatorname{Tor}(A, C)$, что $\sigma\sigma_{ij} = \operatorname{Tor}(\pi_i, \rho_j)$. Чтобы показать, что σ — изоморфизм, возьмем элемент $(a, m, c) \in \operatorname{Tor}(A, C)$, где, конечно, $ma = mc = 0$. Выберем такие индексы i, j, что $a = \pi_i a_i$, $c = \rho_j c_j$ и, кроме того, $ma_i = 0 = mc_j$; это можно сделать, выбрав, если нужно, бо́льшие индексы i, j. Так как $\operatorname{Tor}(\pi_i, \rho_j)$: $(a_i, m, c_j) \mapsto (a, m, c)$, то σ — эпиморфизм. Если $x \in \operatorname{Ker}\sigma$, то $\sigma_{ij}y = x$ для некоторых i, j и $y \in \operatorname{Tor}(A_i, C_j)$. Теперь $\operatorname{Tor}(\pi_i, \rho_j)\, y = \sigma\sigma_{ij}y = \sigma x = 0$, откуда следует существование таких индексов $k \geqslant i$, $l \geqslant j$, что $\operatorname{Tor}(\pi_i^k, \rho_j^l)\, y = 0$. Применяя σ_{kl} и замечая, что $\sigma_{kl}\operatorname{Tor}(\pi_i^k, \pi_j^l) = \sigma_{ij}$, получаем, что $x = \sigma_{ij}y = 0$. Следовательно, σ — изоморфизм. ∎

Ясно, что если α — эндоморфизм группы A, γ — эндоморфизм группы C, то $\operatorname{Tor}(\alpha, \gamma)$ — эндоморфизм группы $\operatorname{Tor}(A, C)$. Особенно интересен случай, когда эндоморфизм является умножением на целое число.

Ж) *Умножение на целое число n в группе A [или в группе C] индуцирует умножение на n в группе* $\operatorname{Tor}(A, C)$.

Отображение $a \mapsto na$ индуцирует отображение $(a, m, c) \mapsto (na, m, c) = n(a, m, c)$, откуда все следует.

Вернемся теперь к определению группы Tor и докажем существование следующего изоморфизма:

З) *Для любой группы C существует естественный изоморфизм*

$$\operatorname{Tor}(Z(m), C) \cong C[m].$$

Если $c \in C[m]$, то $(1, m, c)$ является образующим элементом группы $\operatorname{Tor}(Z(m), C)$. В силу соотношений (1) отображение ξ: $c \mapsto (1, m, c)$ есть гомоморфизм $C[m] \to \operatorname{Tor}(Z(m), C)$. Равенство $(k, n, c) = (1, kn, c) = (1, m, knm^{-1}c)$ показывает, что всякий элемент группы $\operatorname{Tor}(Z(m), C)$ можно привести к виду $(1, m, c)$, где $c \in C[m]$, поэтому отображение ξ сюръективно. Очевидно, равенство $(1, m, c) = 0$ является следствием определяющих соотношений только при $c = 0$, поэтому ξ — мономорфизм. Это доказывает наше утверждение.

Другим очень важным изоморфизмом является следующий изоморфизм, наличие которого, в частности, показывает, что всякая периодическая группа является некоторой группой Tor.

И) *Для любой группы C имеет место естественный изоморфизм*

$$\operatorname{Tor}(Q/Z, C) \cong T(C).$$

Так как $Q/Z = \varinjlim_n Z(m)$, где π_m^n: $Z(m) \to Z(n)$ [при $m \mid n$] — вложения, то по теореме 62.1 группа $\operatorname{Tor}(Q/Z, C)$ является пределом прямого спектра $\{\operatorname{Tor}(Z(m), C)\ (m \in \mathbf{Z},\ m > 0);\ \operatorname{Tor}(\pi_m^n, 1_C)\}$. В силу утверждения З) группы $\operatorname{Tor}(Z(m), C)$ можно заменить группами $C[m]$. Тогда, как легко проверить, $\operatorname{Tor}(\pi_m^n, 1_C)$ заменится вложением

$C[m] \to C[n]$. Поэтому прямой предел будет просто объединением всех подгрупп $C[m]$, т. е. будет периодической частью группы C.

К) *Группа* $\operatorname{Tor}(Z(p^\infty), C)$ *изоморфна p-компоненте группы* C. Это следует из И) и Д).

Л) *Для любых трех групп A, B, C имеет место изоморфизм*

$$A \otimes \operatorname{Tor}(B, C) \oplus \operatorname{Tor}(A, B \otimes C) \cong$$
$$\cong \operatorname{Tor}(A, B) \otimes C \oplus \operatorname{Tor}(A \otimes B, C).$$

Можно представить обе части как прямые пределы таких же групп, где только A, B, C заменены их конечно порожденными подгруппами; в самом деле, прямые суммы, тензорные произведения и периодические произведения коммутируют с прямыми пределами. Следовательно, достаточно проверить существование нужного изоморфизма для конечно порожденных групп A, B, C. Такие группы являются прямыми суммами циклических групп, поэтому все доказательство сводится к случаю, когда A, B, C — циклические группы. Замечание, что в нашу формулу группы A и C входят симметричным образом, уменьшает число случаев, которые нужно рассматривать.

Если $A = Z$, то группы, стоящие в обеих частях формулы, изоморфны группе $\operatorname{Tor}(B, C)$. Если $B = Z$, то группы, стоящие в обеих частях, изоморфны группе $\operatorname{Tor}(A, C)$. Если A есть p-группа, а B есть q-группа, где p, q — различные простые числа, то обе части равны нулю. Единственный случай, который еще остается рассмотреть, это случай, когда A, B и C — циклические p-группы: $A = Z(p^k)$, $B = Z(p^l)$, $C = Z(p^m)$. Легко проверить, что в этом случае каждое из четырех прямых слагаемых в нашей формуле изоморфно $Z(p^n)$, где $n = \min(k, l, m)$, и все доказано.

Упражнения

1. Доказать, что $(a, m_1 + m_2, c) = (a, m_1, c) + (a, m_2, c)$, если члены, стоящие справа, имеют смысл.

2. Группа A является группой без кручения тогда и только тогда, когда (а) $\operatorname{Tor}(A, C) = 0$ для любой группы C [*указание*: использовать следствие 27.3]; (б) $\operatorname{Tor}(A, A) = 0$.

3. Описать группу $\operatorname{Tor}(A, C)$ в случае, когда A — прямая сумма циклических групп.

4. Доказать, что если A и C — ограниченные группы, то $\operatorname{Tor}(A, C) \cong A \otimes C$. [Этот изоморфизм не является естественным.]

5. Проверить, что имеют место изоморфизмы

$$\operatorname{Tor}(A \otimes Z(m), C) \cong A \otimes \operatorname{Tor}(Z(m), C)$$

и

$$\operatorname{Tor}(Z(m), A) \otimes \operatorname{Tor}(Z(m), C) \cong \operatorname{Tor}(\operatorname{Tor}(Z(m), A), C).$$

6. Если для группы A при любой группе C выполнено соотношение $\operatorname{Tor}(A, C) \cong T(C)$, то $A \cong Q/Z \oplus H$, где H — группа без кручения.

7. Если A и C — такие периодические группы, что $\operatorname{Tor}(A, C) \cong Q/Z$, то $A \cong Q/Z \cong C$.

8. Если G — урегулированная копериодическая группа, то

$$G \cong \operatorname{Ext}(Q/Z, \operatorname{Tor}(Q/Z, G)).$$

9. Показать на примере, что Tor не коммутирует с прямыми произведениями и обратными пределами, даже если везде подразумевать периодические части групп. [*Указание*: взять $A = \prod Z(p^\infty)$.]

10. Привести пример, где группа $n \operatorname{Tor}(A, C)$ не изоморфна группе $\operatorname{Tor}(nA, C)$. [*Указание*: взять $A = Z(p^\infty)$.]

11. Доказать, что

$$A \otimes \operatorname{Tor}(B, C) \cong \operatorname{Tor}(A \otimes B, C),$$

если A — группа без кручения.

§ 63. Точные последовательности для функтора Tor

Цель данного параграфа — исследовать периодическое произведение более подробно и показать, что функтор Tor точен слева, причем Tor и $\otimes$ связываются в длинную точную последовательность аналогично тому, как это имеет место для Hom и Ext.

Прежде чем начать рассмотрение точной последовательности для функтора Tor, введем следующим образом связывающий гомоморфизм между Tor и $\otimes$. Пусть

$$E\colon 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

— короткая точная последовательность и (c, m, g) — образующий элемент группы $\operatorname{Tor}(C, G)$, т. е. $mc = mg = 0$ ($c \in C$, $g \in G$, $m \in \mathbf{Z}$, $m > 0$). Существует такой элемент $b \in B$, что $\beta b = c$, и существует такой элемент $a \in A$, что $\alpha a = mb$ [так как $mc = 0$]. Возьмем

$$E_*\colon (c, m, g) \mapsto a \otimes g. \qquad (2)$$

Этим мы определяем отображение образующих группы $\operatorname{Tor}(C, G)$ в множество образующих группы $A \otimes G$. В самом деле, $a \otimes g$ не зависит от выбора элементов b и a, так как если выбрать элементы b', a' иначе, то будет $b' = b + \alpha a_0$ ($a_0 \in A$), $\alpha a' = \alpha a + \alpha(ma_0)$, откуда $a' \otimes g = a \otimes g + ma_0 \otimes g$, где $ma_0 \otimes g = a_0 \otimes mg = 0$. Легко также видеть, что при отображении E_* сохраняются определяющие соотношения (1) из § 62, в том смысле, что если очевидным образом распространить отображение E_* на всю группу $\operatorname{Tor}(C, G)$, то равные элементы группы Tor будут переходить в равные элементы группы $A \otimes G$. Поэтому

$$E_*\colon \operatorname{Tor}(C, G) \to A \otimes G$$

— гомоморфизм. Он является естественным, так как если $\varphi: G \to H$ — какой-то гомоморфизм, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}(C, G) & \longrightarrow & A \otimes G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tor}(C, H) & \longrightarrow & A \otimes H \end{array}$$

где отображения определены очевидным образом, коммутативна [в силу того, что обоими способами элемент (c, m, g) переводится в элемент $a \otimes \varphi g$]. Гомоморфизм E_* называется *связывающим гомоморфизмом* [в силу симметрии функторов Tor и $\otimes$ относительно аргументов мы имеем только один такой гомоморфизм]. Этот гомоморфизм используется в следующей теореме.

Теорема 63.1 (Картан и Эйленберг [1]). *Если последовательность E вида* (1) *точна, то для любой группы G точна индуцированная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Tor}(A, G) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Tor}(B, G) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Tor}(C, G) \to$$
$$\xrightarrow{E_*} A \otimes G \xrightarrow{\alpha \otimes 1} B \otimes G \xrightarrow{\beta \otimes 1} C \otimes G \longrightarrow 0. \quad (3)$$

Здесь α_*, β_* — сокращенные обозначения отображений $\mathrm{Tor}(\alpha, 1_G)$, $\mathrm{Tor}(\beta, 1_G)$.

Напомним, что функторы Tor и $\otimes$ коммутируют с прямыми пределами и что прямой предел точных последовательностей является точной последовательностью [это верно также для более длинных точных последовательностей, так как прямые пределы сохраняют ядра и образы]. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда G — конечно порожденная группа. Используя разложимость группы G в прямую сумму циклических групп, можно свести доказательство к случаям $G = Z$ и $G = Z(m)$. Первый случай тривиален, так как тогда группы Tor обращаются в нуль и последовательность (3) превращается в последовательность (1). Во втором случае элементы групп Tor имеют вид $(x, m, 1)$, где $mx = 0$, а элементы тензорных произведений имеют вид $x \otimes 1$, где x рассматривается по модулю mX [X стоит вместо A, B или C]. Точность на двух последних местах вытекает из теоремы 60.2. Очевидно, $\beta_*\alpha_* = (\beta\alpha)_* = 0$. Кроме того, $E_*\beta_*(b, m, 1) = E_*(c, m, 1) = a \otimes 1 = 0$, так как $\alpha a = mb = 0$, и $(\alpha \otimes 1) E_*(c, m, 1) = (\alpha \otimes 1)(a \otimes 1) = \alpha a \otimes 1 = 0$, так как $\alpha a \in mB$. Таким образом, нам нужно только показать, что ядра содержатся в образах предшествующих групп, для первых четырех мест.

Пусть $\alpha_*(a, m, 1) = 0$. Тогда $(\alpha a, m, 1) = 0$, и $\alpha a = 0$, $a = 0$, т. е. α_* — мономорфизм. Если $\beta_*(b, m, 1) = 0$, то аналогично получаем $\beta b = 0$, и существует такой элемент $a \in A$, что $\alpha a = b$ и, кроме того, $ma = 0$. Следовательно, $\alpha_*(a, m, 1) = (b, m, 1)$, откуда вытекает точность последовательности на втором месте. Если $E_*(c, m, 1) = 0$, то $a \otimes 1 = 0$ [в обозначениях формулы (2)], т. е. $a \in mA$. Пишем

$a = ma'$ ($a' \in A$), $m(b - \alpha a') = 0$ и получаем, что $(b - \alpha a', m, 1) \in \in \mathrm{Tor}(B, Z(m))$, причем этот элемент отображается на элемент $(c, m, 1)$. Наконец, если $(\alpha \otimes 1)(a \otimes 1) = 0$, то $\alpha a = mb$ для некоторого $b \in B$, и для этого элемента b выполнено $E_*(\beta b, m, 1) = a \otimes 1$. Это доказывает точность последовательности на $A \otimes G$. ∎

Первая часть последовательности (3) показывает, что функтор Tor точен слева.

Из доказанной сейчас теоремы следует, что если $0 \to H \xrightarrow{\varphi} F \to C \to \to 0$ — точная последовательность, где F — свободная группа, то последовательность $0 \to \mathrm{Tor}(A, C) \to A \otimes H \to A \otimes F \to A \otimes C \to \to 0$ точна. Поэтому *группу* Tor (A, C) *можно также определить как ядро отображения*

$$1 \otimes \varphi: A \otimes H \to A \otimes F.$$

Такая интерпретация ведет к соответствующей системе образующих и определяющих соотношений для группы Tor (A, C) [напомним, что группы $A \otimes H$ и $A \otimes F$ являются прямыми суммами групп, изоморфных группе A].

Если последовательность (1) является сервантно точной, то последовательность (3) распадается на две короткие точные последовательности. Это сразу следует из теоремы 60.4. Кроме того, справедлива

Теорема 63.2 (Фукс [9]). *Если последовательность* (1) *сервантно точна, то для любой группы G сервантно точна индуцированная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Tor}(A, G) \to \mathrm{Tor}(B, C) \to \mathrm{Tor}(C, G) \to 0.$$

В силу теорем 62.1 и 29.6 здесь доказывать нечего. ∎

Упражнения

1. Если A', B' — сервантные подгруппы групп A и B, то Tor (A', B') — сервантная подгруппа группы Tor (A, B).

2. (а) Если G — такая группа, что последовательность $0 \to \to \mathrm{Tor}(A, G) \to \mathrm{Tor}(B, G) \to \mathrm{Tor}(C, G) \to 0$ точна для любой точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$, то G — группа без кручения.

(б) Если предположить выполненным то же свойство, но только для точных последовательностей $0 \to A \to B \to C \to 0$ периодических групп, то получится, что периодическая часть группы G — делимая группа.

3. Если для точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$ последовательность $0 \to \mathrm{Tor}(A, G) \to \mathrm{Tor}(B, G) \to \mathrm{Tor}(C, G) \to 0$ точна при любой группе G [при любой группе $G = Z(m)$], то исходная последовательность сервантно точна.

4. Пусть A и C являются p-группами.

(а) Применить дважды теорему 63.2 и найти базисную подгруппу группы Tor (A, C), если известны базисные подгруппы групп A и C.

(б) Показать, что в общем случае базисная подгруппа группы $\operatorname{Tor}(A, C)$ не изоморфна периодическому произведению базисных подгрупп групп A и C.

5. Пусть $A = F_1/H_1$, $C = F_2/H_2$, где F_1, F_2 — свободные группы. Доказать, что

$$\operatorname{Tor}(A, C) \cong [(F_1 \otimes H_2) \cap (H_1 \otimes F_2)]/(H_1 \otimes H_2),$$

где в правой части все группы рассматриваются как подгруппы группы $F_1 \otimes F_2$.

6 (Яхья [2]). Пусть r, n — такие целые числа, что $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Если даны n групп A_i, определить $S_r^n(A_1, \ldots, A_n)$ как группу, порожденную символами $(a_1, \ldots, a_n; m)$, где $a_i \in A_i$, $m \in \mathbf{Z}$, $m > 0$ и $ma_i = 0$ для всех i, причем эти символы связаны соотношениями

$$(a_1, \ldots, a_i + a_i', \ldots, a_n;\ m) = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n;\ m) + (a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_n;\ m),$$

$$(a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n;\ km) = (ka_1, \ldots, ka_r, a_{r+1}, \ldots, a_n;\ m)$$

всякий раз, когда члены, стоящие в правых частях, имеют смысл. Доказать:

(а) S_r^n является аддитивным функтором из категории $\mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{A}$, ковариантным по каждому аргументу;

(б) S_r^n коммутирует с прямыми пределами;

(в) $S_{n-1}^n(A_1, \ldots, A_n) \cong \operatorname{Tor}(A_1, \ldots, \operatorname{Tor}(A_{n-2}, \operatorname{Tor}(A_{n-1}, A_n)) \ldots)$.

7. Доказать закон ассоциативности для Tor:

$$\operatorname{Tor}(\operatorname{Tor}(A, B), C) \cong \operatorname{Tor}(A, \operatorname{Tor}(B, C))$$

[изоморфизм естественный].

§ 64. Строение периодических произведений

Из изложенного в § 62 следует, что строение групп $\operatorname{Tor}(A, C)$ может быть описано для произвольных групп A и C, если оно известно для p-групп A и C. Поэтому мы в настоящем параграфе ограничимся рассмотрением p-групп.

Везде дальше A и C будут p-группами. Следующий ряд лемм приведет нас к результату, который позволит находить базисные подгруппы ульмовских факторов групп $\operatorname{Tor}(A, C)$.

Лемма 64.1 (Нунке [4]). *Если $p^\sigma A = 0$ для некоторого порядкового числа σ, то*

$$p^\sigma \operatorname{Tor}(A, C) = 0 \text{ *при любой группе* } C.$$

Существует точная последовательность $0 \to C \to \oplus Z(p^\infty)$ с достаточно большим числом слагаемых в прямой сумме. Отсюда

получается индуцированная точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Tor}(A, C) \to \mathrm{Tor}(A, \oplus Z(p^\infty)) = \oplus \mathrm{Tor}(A, Z(p^\infty)) \cong \oplus A.$$

Из предположения $p^\sigma A = 0$ следует, что $p^\sigma(\oplus A) = 0$, откуда получается нужное равенство. ∎

Лемма 64.2 (Нунке [4]). *Для p-групп A, C и любого порядкового числа σ*

$$\mathrm{Tor}(p^\sigma A, p^\sigma C) = p^\sigma \mathrm{Tor}(A, C).$$

Повторно применяя теорему 63.1, получаем, что группу $\mathrm{Tor}(p^\sigma A, p^\sigma C)$ можно считать вложенной в $\mathrm{Tor}(A, C)$ естественным образом. Проверим сначала включение $\subseteq$. Пусть $\sigma = 1$. Если (pa, p^k, pc) — образующий элемент группы $\mathrm{Tor}(pA, pC)$, то $p^{k+1}a = p^{k+1}c = 0$ и в группе $\mathrm{Tor}(A, C)$ мы имеем $(pa, p^k, pc) = (pa, p^{k+1}, c) = p(a, p^{k+1}, c) \in p\,\mathrm{Tor}(A, C)$. Теперь мы можем вести доказательство с помощью трансфинитной индукции. Если включение $\subseteq$ имеет место для некоторого порядкового числа σ, то в силу уже доказанного

$$\mathrm{Tor}(p^{\sigma+1}A, p^{\sigma+1}C) \subseteq p\,\mathrm{Tor}(p^\sigma A, p^\sigma C) \subseteq p^{\sigma+1}\mathrm{Tor}(A, C).$$

Предположим, что ρ — предельное порядковое число и что включение уже доказано для всех $\sigma < \rho$. Тогда $p^\rho A \subseteq p^\sigma A$, $p^\rho C \subseteq p^\sigma C$, откуда $\mathrm{Tor}(p^\rho A, p^\rho C) \subseteq \mathrm{Tor}(p^\sigma A, p^\sigma C) \subseteq p^\sigma \mathrm{Tor}(A, C)$ [последнее включение мы предполагаем выполненным]. Отсюда

$$\mathrm{Tor}(p^\rho A, p^\rho C) \subseteq \bigcap_{\sigma<\rho} p^\sigma \mathrm{Tor}(A, C) = p^\rho \mathrm{Tor}(A, C).$$

Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathrm{Tor}(p^\sigma A, p^\sigma C) & \to & \mathrm{Tor}(A, p^\sigma C) & \to & \mathrm{Tor}(A/p^\sigma A, p^\sigma C) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathrm{Tor}(p^\sigma A, C) & \to & \mathrm{Tor}(A, C) & \to & \mathrm{Tor}(A/p^\sigma A, C) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathrm{Tor}(p^\sigma A, C/p^\sigma C) & \to & \mathrm{Tor}(A, C/p^\sigma C) & \to & \mathrm{Tor}(A/p^\sigma A, C/p^\sigma C)
\end{array}$$

в которой все строки и столбцы точны в силу теоремы 63.1. По лемме 8.3 это дает точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Tor}(p^\sigma A, p^\sigma C) \to \mathrm{Tor}(A, C) \to \mathrm{Tor}(A/p^\sigma A, C) \oplus \mathrm{Tor}(A, C/p^\sigma C).$$

По лемме 64.1 слагаемые обращаются в нуль при умножении на p^σ, поэтому последний гомоморфизм имеет ядро, содержащее $p^\sigma \mathrm{Tor}(A, C)$. Это дает нужное включение $\supseteq$. ∎

Лемма 64.3 (Нунке [4]). *Для любого целого числа n*

$$\mathrm{Tor}(A[p^n], C[p^n]) = \mathrm{Tor}(A, C)[p^n].$$

Умножение на p^n в группе A дает точную последовательность $0 \longrightarrow A[p^n] \longrightarrow A \xrightarrow{p^n} A$, откуда получается точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(A[p^n], C) \longrightarrow \mathrm{Tor}(A, C) \xrightarrow{p^n} \mathrm{Tor}(A, C).$$

Отсюда имеем $\mathrm{Tor}(A, C)[p^n] = \mathrm{Ker}\, p^n = \mathrm{Tor}(A[p^n], C)$. Меняя ролями группы A и C, с помощью тех же рассуждений получаем требуемый результат. ∎

Следующий результат позволяет определить важные структурные инварианты группы $\mathrm{Tor}(A, C)$, а именно ранг группы $p^\sigma \mathrm{Tor}(A, C)$ и инварианты Ульма — Капланского.

Теорема 64.4 (Нунке [4]). *Пусть группы A, C являются p-группами и σ — порядковое число. Тогда*

$$r(p^\sigma \mathrm{Tor}(A, C)) = r(p^\sigma A)\cdot r(p^\sigma C), \qquad (1)$$

$$f_\sigma(\mathrm{Tor}(A, C)) = f_\sigma(A) f_\sigma(C) + f_\sigma(A)\, r(p^{\sigma+1}C) + r(p^{\sigma+1}A)\, f_\sigma(C). \qquad (2)$$

Применяя леммы 64.2 и 64.3, мы получаем

$$(p^\sigma \mathrm{Tor}(A, C))[p] = \mathrm{Tor}((p^\sigma A)[p], (p^\sigma C)[p]). \qquad (3)$$

Здесь все группы являются прямыми суммами групп порядка p, поэтому в силу утверждений Д) и З) из § 62 группа, стоящая в правой части, является прямой суммой $r(p^\sigma A)\cdot r(p^\sigma C)$ групп порядка p. Этим доказано равенство (1).

Чтобы доказать равенство (2), напишем $(p^\sigma A)[p] = (p^{\sigma+1}A)[p] \oplus G$ и $(p^\sigma C)[p] = (p^{\sigma+1}C)[p] \oplus H$, где по определению $r(G) = f_\sigma(A)$ и $r(H) = f_\sigma(C)$. Из равенства (3) следует

$$(p^\sigma \mathrm{Tor}(A, C))[p] = \mathrm{Tor}((p^{\sigma+1}A)[p], (p^{\sigma+1}C)[p]) \oplus$$
$$\oplus \mathrm{Tor}(G, (p^{\sigma+1}C)[p]) \oplus \mathrm{Tor}((p^{\sigma+1}A)[p], H) \oplus \mathrm{Tor}(G, H).$$

Первое слагаемое правой части — это группа $(p^{\sigma+1} \mathrm{Tor}(A, C))[p]$, поэтому σ-й инвариант Ульма — Капланского группы $\mathrm{Tor}(A, C)$ равен сумме рангов остальных слагаемых. Это выражено в формуле (2). ∎

Следствие 64.5 (Нунке [4]). *Если A и C — редуцированные периодические группы, то ульмовская длина группы* $\mathrm{Tor}(A, C)$ *равна минимуму длин групп A и C.*

Это непосредственно следует из равенства (2). ∎

Как мы увидим в гл. XII, прямые суммы счетных p-групп вполне определяются своими инвариантами Ульма — Капланского. Следовательно, теорема 64.4 дает возможность полностью определить периодическое произведение любых двух счетных групп или прямых сумм счетных групп.

Упражнения

1. Для σ-х ульмовских подгрупп доказать равенство

$$\mathrm{Tor}(A, C)^{\sigma} = \mathrm{Tor}(A^{\sigma}, C^{\sigma}).$$

2. (а) Делимой частью группы Tor (A, C) служит периодическое произведение максимальных делимых подгрупп групп A и C.

(б) Если группа Tor (A, C) содержит подгруппу типа p^{∞}, то и группа A, и группа C также содержат подгруппы типа p^{∞}.

3 (Нунке [4]). Показать, что базисные подгруппы группы Tor (A, C) всегда имеют ту же мощность, что и сама группа Tor (A, C).

4 (Нунке [4]). Если A', A'' — подгруппы группы A, то

$$\mathrm{Tor}(A' \cap A'', C) = \mathrm{Tor}(A', C) \cap \mathrm{Tor}(A'', C).$$

[*Указание*: составить коммутативный квадрат с этими группами и группой Tor (A, C).]

5 (Нунке [4]). Если дан элемент $u \in \mathrm{Tor}(A, C)$, то существуют такие конечные подгруппы $A_u \subseteq A$ и $C_u \subseteq C$, что 1) $u \in \mathrm{Tor}(A_u, C_u)$; 2) если $u \in \mathrm{Tor}(A', C')$ для некоторых подгрупп $A' \subseteq A$ и $C' \subseteq C$, то $A_u \subseteq A'$ и $C_u \subseteq C'$. [*Указание*: взять в качестве A_u и C_u подгруппы минимальных порядков со свойством 1).]

6. Пусть $(a, p^k, c) \in \mathrm{Tor}(A, C)$, где A и C являются p-группами. Доказать, что высота элемента (a, p^k, c) равна минимуму высот элементов a и c в группах A и C соответственно.

7*. (а) Пусть A и C являются p-группами, причем группа C не содержит элементов бесконечной высоты. Если элемент a имеет порядок p и бесконечную высоту, то отображение $(a, p, c) \mapsto c$ определяет изоморфизм между подгруппой группы Tor (A, C) и группой $C[p]$, сохраняющий высоты элементов.

(б) Пусть C — периодическая часть p-адического пополнения группы $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z(p^n)$. Доказать, что всякая подгруппа группы $C[p]$, в которой высоты элементов [рассматриваемые в группе C] ограничены, должна быть конечной, а группу $C[p]$ нельзя вложить с помощью изоморфизма, сохраняющего высоты, в прямую сумму циклических групп.

(в) Используя (а) и (б), получить группу Tor (A, C), в которой нет элементов бесконечной высоты, но которая не является прямой суммой циклических групп.

Замечания

Кронекеровское, или тензорное, произведение было с давних пор известно в линейной алгебре. В теорию групп это понятие было введено Уитнеем [1]. Теперь тензорное произведение модулей, алгебр и т.д. играет фундаментальную роль. Tor_n^R используется не так широко. [Каждый функтор Tor_n^R встречается в трех членах в бесконечной точной последовательности, заменяющей последовательность (3) § 63 в общем случае.]

В общем случае об алгебраической структуре тензорного или периодического произведения модулей ничего не известно, за исключением некоторых тривиальных вещей или результатов, полученных для очень частных случаев.

Хаттори [Hattori *J. Math. Soc. Japan.*, 9 (1957), 381—385] показал, что над областями целостности **R** тензорное произведение **R**-модулей без кручения снова является **R**-модулем без кручения тогда и только тогда, когда **R** — прюферово кольцо.

Различные результаты были получены для плоских модулей. **R**-модуль F называется *плоским*, если всякая короткая точная последовательность правых **R**-модулей дает точную последовательность абелевых групп при тензорном умножении ее членов на модуль F над кольцом **R**. Это эквивалентно тому, что $\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{R}}(M, F) = 0$ для любого правого **R**-модуля M. Другую характеризацию плоских модулей получил В. Е. Говоров [*Сиб. мат. ж.*, 6 (1965), 300—304]; он доказал, что плоские модули — это прямые пределы свободных модулей. Ламбек [Lambek, *Canad. Math. Bull.* 7 (1964), 237—243] доказал, что **R**-модуль F является плоским тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(F, Q/Z)$ — инъективный правый **R**-модуль. Над областями главных левых идеалов плоские модули — это в точности модули без кручения. Все **R**-модули являются плоскими тогда и только тогда, когда кольцо **R** регулярно в смысле фон Неймана.

Чрезвычайно важен изоморфизм, установленный в п. K) § 59; он выражает тот факт, что тензорное произведение и Hom являются сопряженными.

Проблема 47. Определить строение тензорного произведения $A \otimes C$ в случае, когда A и C — группы без кручения [смешанные группы].

Проблема 48. Какие периодические группы G могут быть представлены в виде $G \cong A \otimes_{\mathbf{R}} C$, где A и C — некоторые **R**-модули с периодическими аддитивными группами?

Проблема 49. Описать [ульмовские факторы] группы $\mathrm{Tor}(A, C)$ для p-групп A, C.

Проблема 50. Как связаны между собой группы A и A', если $\mathrm{Tor}(A, C) \cong \mathrm{Tor}(A', C)$ для любых редуцированных групп C? [1])

---

[1]) Частичный ответ на этот вопрос дал П. Хилл [Hill P., *J. Algebra*, **19** (1971), № 3, 379—383.].—*Прим. перев.*

Список литературы

Бальцежик (Balcerzyk S.)

1. Remark on a paper of S. Gacsályi, *Publ. Math. Debrecen*, 4 (1956), 357—358.
2. On algebraically compact groups of I. Kaplansky, *Fund. Math.*, **44** (1957), 91—93.
3. On factor groups of some subgroups of a complete direct sum of infinite cyclic groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 7 (1959), 141—142.

Баумслаг, Блэкбурн (Baumslag G., Blackburn N.)

1. Direct summands of unrestricted direct sums of abelian groups, *Arch. Math.*, **10** (1959), 403—408.

Биркгоф (Birkhoff G.)

1. Subgroups of abelian groups, *Proc. London Math. Soc.*, **38** (1934), 385—401.

Бойер (Boyer D. L.)

1. On the theory of p-basic subgroups of abelian groups, Topics in Abelian Groups, 323—330 (Chicago, Illinois, 1963).

Бурбаки (Bourbaki N.)

1. Algèbre, Chap. VII, Modules sur les anneaux principaux, Paris, 1952. (Русский перевод: Бурбаки Н., Алгебра, «Наука», М., 1966.)

Бэр (Baer R.)

1. Der Kern, eine charakteristische Untergruppe, *Compositio* Math., **1** (1934), 254—283.
2. Abelian groups without elements of finite order, *Duke Math., J.*, **3** (1937), 68—122.
3. Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 800—806.
4. Die Torsionsuntergruppe einer abelschen Gruppe, *Math. Ann.*, **135** (1958), 219—234.

Гачайи (Gacsályi S.)

1. On algebraically closed abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952), 292—296.
2. On pure subgroups and direct summands of abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, 4 (1955), 89—92.

Голема, Хуляницкий (Golema K., Hulanicki A.)

1. The structure of the factor group of the unrestricted sum by the restricted sum of abelian groups, II, *Fund. Math.*, **53** (1963—1964), 177—185.

де Гроот (de Groot J.)

1. An isomorphism criterion for completely decomposable abelian groups, *Math. Ann.*, **132** (1956), 328—332.

Грэтцер, Шмидт (Grätzer G., Schmidt E. T.)

1. A note on a special type of fully invariant subgroups of abelian groups, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, 3—4 (1961), 85—87

Дьедонне (Dieudonné J.)

1. Sur les produits tensoriels, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 64 (1948), 101—117.
2. Sur les p-groupes abéliens infinis, *Portugal. Math.*, 11 (1952), 1—5.

Длаб (Dlab V.)

1. D-Rang einer abelschen Gruppe, *Časopis Pěst.* Mat., 82 (1957), 314—334.
2. The Frattini subgroups of abelian groups, *Czechoslovak. Math.* J., 10 (1960), 1—16.
3. On cyclic groups, Czechoslovak Math. J., 10 (1960), 244—254.
4. On a characterization of primary abelian qroups of bounded order, *J. Lond. Math. Soc.*, 36 (1961), 139—144.

Ирвин (Irwin J.)

1. High subgroups of abelian torsion groups, *Pacific J. Math.*, 11 (1961), 1375—1384.

Ирвин, Ричмен (Irwin J. M., Richman F.)

1. Direct sums of countable groups and related concepts, *J. Algebra*, 2 (1965), 443—450.

Ирвин, Уокер (Irwin J. M., Walker E. A.)

1. On N-high subgroups of abelian groups, *Pacific J. Math.*, 11 (1961), 1363—1374.
2. On isotype subgroups of abelian groups, *Bull. Soc. Math. France*, 89 (1961), 451—460.

Ирвин, Уокер К., Уокер Э. (Irwin J. M.., Walker C. P., Walker E. A.)

1. On p^α-pure sequences of abelian groups, Topics in Abelian Groups, 69—119 (Chicago, Illinois, 1963).

Калужнин Л. А.

1. Sur les groupes abéliens primaires sans éléments de hauteur infinie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 225 (1947), 713—715.

Капланский (Kaplansky I.)

1. Modules over Dedekind rings and valuation rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72 (1952), 327—340.
2. Infinite abelian groups, Univ. of Michigan Press, Ann. Arbor, Michigan, 1954.
3. Projective modules, *Ann. of Math.*, 68 (1958), 372—377.

Картан, Эйленберг (Cartan H., Eilenberg S.)

1. Homological Algebra, Princeton Univ. Press., Princeton, New Jersey, 1956. (Русский перевод: Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960.)

Катлер (Cutler D. C.)

1. Quasi-isomorphisms for infinite abelian p-groups, *Pacific J. Math.*, 16 (1966), 25—45.

Кертес (Kertész A.)

1. On fully decomposable abelian torsion groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 3 (1952), 225—232.
2. On subgroups and homomorphic images, *Publ. Math. Debrecen*, 3 (1953), 174—179.

3. The general theory of linear equation systems over semisimple rings, *Publ. Math. Debrecen*, 4 (1955), 79—86.

Кертес, Селе (Kertész A., Szele T.)

1. On the existence of non-discrete topologies in infinite abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, 3 (1953), 187—189.

Ковач (Kovács L.)

1. On subgroups of the basic subgroup, *Publ. Math. Debrecen*, 5 (1958), 261—264.

Кон (Cohn P. M.)

1. The complement of a finitely generated direct summand of an abelian group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 520—521.

Куликов Л. Я.

1. К теории абелевых групп произвольной мощности, *Мат. сб.*, 9 (1941), 165—182.
2. К теории абелевых групп произвольной мощности, *Мат. сб.*, 16 (1945), 129—162.
3. Обобщенные примарные группы, I, Труды ММО, 1 (1952), 247—326; II, Труды ММО, 2 (1953), 85—167.
4. О прямых разложениях групп, *Укр. матем. ж.*, 4 (1952), 230—275, 347—372.

Курош А. Г.

1. Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, *Math. Ann.*, 106 (1932), 107—113.
2. Теория групп, «Наука», М., 1967.

Кхаббаз (Khabbaz S. A.)

1. On a theorem of Charles and Erdélyi, *Bull. Soc. Math. France*, 89 (1961), 103—104.
2. The subgroups of a divisible group G which can be represented as intersections of divisible subgroups of G, *Pacific J. Math.*, 11 (1961), 267—273.

Кхаббаз, Уокер Э. (Khabbaz S. A., Walker E. A.)

1. The number of basic subgroups of primary groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 15 (1964), 153—155.

Леви (Levi F. W.)

1. Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen, Habilitationsschrift, Leipzig, 1917.

Левис (Lewis P. E.)

1. Characters of abelian groups, *Amer. J. Math.*, 64 (1942), 81—105.

Лось (Łoś J.)

1. Abelian groups that are direct summands of every abelian group which contains them as pure subgroups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 4 (1956), 73, and *Fund. Math.*, 44 (1957), 84—90.
2. Linear equations and pure subgroups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 7 (1959), 13—18.
3. Generalized limits in algebraically compact groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 7 (1959), 19—21.

Мадер (Mader A.)

1. A characterization of completions of direct sums of cyclic groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 15 (1967), 231—233.

Маклейн (Mac Lane S.)

1. Duality for groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56 (1950), 485—516.
2. Group extensions by primary abelian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95 (1960), 1—16.

3. Homology, Academic Press, New York, 1963. (Русский перевод: Маклейн С., Гомология, «Мир», М., 1964.)

Маранда (Maranda J. M.)

1. On pure subgroups of abelian groups, *Arch. Math.*, **11** (1960), 1—13.

Меджиббен (Megibben C.)

1. On subgroups of primary abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 293—294.

Митчел А., Митчел Р. (Mitchell A. R., Mitchell R. W.)

1. Disjoint basic subgroups, *Pacific J. Math.*, **23** (1967), 119—127.

Мостовский, Сонсяда (Mostowski A. W., Sąsiada E.)

1. On the bases of modules over a principal ideal ring, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **3** (1955), 477—478.

Нунке (Nunke R. J.)

1. Modules of extensions over Dedekind rings, *Ill. J. Math.*, **3** (1959), 222—241.
2. A note on abelian group extensions, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 1401—1403.
3. Purity and subfunctors of the identity, Topics in Abelian Groups, 121—171 (Chicago, Illinois, 1963).
4. On the structure of Tor, I, Proc. Colloq. Abelian Groups, 115—124 (Budapest, 1964), II, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 453—464.

Пирс (Pierce R. S.)

1. Homomorphisms of primary abelian groups, Topics in Abelian Groups, 215—310 (Chicago, Illinois, 1963).

Понтрягин Л. С.

1. The theory of topological commutative groups, *Ann. of Math.*, **35** (1934), 361—388.

Прюфер (Prüfer H.)

1. Unendliche abelsche Gruppen von Elementen endlicher Ordnung, Dissertation, Berlin, 1921.
2. Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären abelschen Gruppen, *Math. Z.*, **17** (1923), 35—61.
3. Theorie der abelschen Gruppen, I, Grundeigenschaften, *Math. Z.*, **20** (1924), 165—187; II, Ideale Gruppen, *Math. Z.*, **22** (1925), 222—249.

Радо (Rado R.)

1. A proof of the basis theorem for finitely generated abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 74—75, 160.

Рангасвами (Rangaswamy K. M.)

1. Extension theory of abelian groups, *Math. Stud.*, **32** (1964), 11—16.
2. Characterisation of intersections of neat subgroups of abelian groups, *J. Indian Math. Soc.*, **29** (1965), 31—36.

Ротман (Rotman J.)

1. A completion functor on modules and algebras, *J. Algebra*, **9** (1968), 369—387.

Селе (Szele T.)

1. Über die direkten Teiler der endlichen abelschen Gruppen, *Comment. Math. Helv.*, **22** (1949), 117—124.
2. Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen, *J. Reine Angew. Math.*, **188** (1950), 167—192.
3. On direct sums of cyclic groups, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1951), 76—78.

4. On groups with atomic layers, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 3 (1952), 127—129.
5. On direct sums of cyclic groups with one amalgamated subgroup, *Publ. Math. Debrecen*, 2 (1952), 302—307.
6. On direct decompositions of abelian groups, *J. London Math. Soc.*, 28 (1953), 247—250.
7. On the basic subgroups of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 5 (1954), 129—141.

Селпал (Szélpál I.)

1. Die abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1949), 51—53.

Скотт (Scott W. R.)

1. The number of subgroups of given index in nondenumerable abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 19—22.

Спекер (Specker E.)

1. Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen, *Portugal. Math.* **9** (1950), 131—140.

Теллман (Tellman S. G.)

1. Images of induced endomorphisms in Ext (H, G), *Acta Sci. Math. Szeged*, **23** (1962), 290—291.

Уитней (Whitney H.)

1. Tensor products of abelian groups, *Duke Math. J.*, 4 (1938), 495—520.

Ульм (Ulm H.)

1. Zur Theorie der abzählbar-unendlichen abelschen Gruppen, *Math. Ann.*, **107** (1933), 774—803.

Уокер К. (Walker C. P.)

1. Relative homological algebra and abelian groups, *Ill. J. Math.*, **10** (1966), 186—209.

Уокер Э. (Walker E. A.)

1. Cancellation in direct sums of groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 898—902.
2. Subdirect sums and infinite abelian groups, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 287—291.
3. Quotient groups of reduced abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 91—92.
4. On n-extensions of abelian groups, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, 8 (1965), 71—74.

Федоров Ю. Г.

1. О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс, УМН, 6 (1951), 187—189.

Фробениус, Штикельбергер (Frobenius G., Stickelberger L.)

1. Über Gruppen von vertauschbaren Elementen, *J. Reine Angew. Math.*, 86 (1878), 217—262.

Фукс (Fuchs L.)

1. The direct sum of cyclic groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 3 (1952), 177—195.
2. On the structure of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 4 (1953), 267—288.

3. On a special kind of duality in group theory, II, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 4 (1953), 299—314.
4. On a property of basic subgroups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **5** (1954), 143—144.
5. On a useful lemma for abelian groups, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **17** (1956), 134—138.
6. Über das Tensorprodukt von Torsionsgruppen, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **18** (1957), 29—32.
7. Abelian groups, Publishing House of the Hungarian Academy of Science, Budapest, 1958.
8. On character groups of discrete abelian groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **10** (1959), 133—140.
9. Notes on abelian groups, I, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, **2** (1959), 5—23; II, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11** (1960), 117—125.
10. On algebraically compact abelian groups, *J. Natur. Sci. and Math.* 3 (1963), 73—82.
11. Note on factor groups in complete direct sums, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **11** (1963), 39—40.
12. Some generalizations of the exact sequences concerning Hom and Ext, Proc. Colloq. Abelian Groups, 57—76 (Budapest, 1964).
13. Note on linearly compact abelian groups, *J. Austral. Math. Soc.*, **9** (1969), 433—440.

Харрисон (Harrison D. K.)

1. Infinite abelian groups and homological methods, *Ann. of Math.*, **69** (1959), 366—391.
2. Two of the problems of L. Fuchs, *Publ. Math. Debrecen*, 7 (1960), 316—319.
3. On the structure of Ext, Topics in Abelian Groups, 195—209 (Chicago, Ill., 1963).

Харрисон, Ирвин, Пирси, Уокер Э. (Harrison D. K., Irwin J. M., Peercy C. L., Walker E. A.)

1. High extensions of abelian groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14** (1963), 319—330.

Хед (Head T. J.)

1. A direct limit representation for abelian groups with an application to tensor sequences, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **18** (1967), 231—234.

Хилл (Hill P.)

1. Concerning the number of basic subgroups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **17** (1966), 267—269.

Хонда (Honda K.)

1. Realism in the theory of abelian groups, I, *Comment. Math. Univ. St. Paul*, **5** (1956) 37—75, II, *Comment. Math. Univ. St. Paul*, **9** (1961), 11—28; III, *Comment Math. Univ. St. Paul*, **12** (1964), 75—111.
2. From a theorem of Kulikov to a problem of Kaplansky, *Comment. Math. Univ. St. Paul*, 6 (1957), 43—48.

Хуляницкий (Hulanicki A.)

1. Algebraic characterization of abelian divisible groups which admit compact topologies, *Fund. Math.*, **44** (1957), 192—197.
2. Algebraic structure of compact abelian groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **6** (1958) 71—73.
3. The structure of the factor group of an unrestricted sum by the restricted sum of abelian groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **10** (1962), 77—80.

Шарль (Charles B.)

1. Étude des groupes abéliens primaires de type $\leqslant\omega$, *Ann. Univ. Sarav. Sciences*, 4, (1955), 184—199.
2. Une caractérisation des intersections de sous-groupes divisibles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 250 (1960), 256—257.
3. Étude sur les sous-groupes d'un groupe abélien, *Bull. Soc. Math. France*, 88 (1960), 217—227.
4. Méthodes topologiques en théorie des groupes abéliens, Proc. Colloq. Abelian Groups, 29—42 (Budapest, 1964).

Эйленберг, Маклейн (Eilenberg S., Mac Lane S.)

1. Group extensions and homology, *Ann. of Math.*, 43 (1942), 757—831.

Энокс (Enochs E.)

1. Isomorphic refinements of decompositions of a primary group into closed groups, *Bull. Soc. Math. France*, 91 (1963), 63—75.

Эрдели (Erdélyi M.)

1. Direct summands of abelian torsion groups (Hungarian), *Acta Univ. Debrecen*, 2 (1955), 145—149.

Яхья (Yahya S. M.)

1. P-pure exact sequences and the group of p-pure extensions *Ann. Univ. Sci. Budapest*, 5 (1962), 179—191.
2. Functors S_r^n $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, *J. Natur. Sci. and Math.*, 3 (1963), 41—56.

Указатель обозначений

$A, B, C, G, H, \dots$	группы или подмножества групп
$I, J, K, \dots$	множества индексов
$k, l, m, n, p, q, \dots$	целые числа (p, q — простые числа)
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \rho, \pi,$ $\varphi, \psi, \dots$	отображения, гомоморфизмы
$\rho, \sigma, \tau, \dots$	порядковые числа
$\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{r}, \dots$	кардинальные числа
$\mathfrak{X}, \mathfrak{H}, \dots$	классы
$\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \dots$	категории
$\mathsf{R}, \mathsf{L}, \dots$	кольца, идеалы
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$	прямые или обратные спектры
$\mathbf{I}, \mathbf{K}, \mathbf{D}, \dots$	идеалы или дуальные идеалы в структуре

Теория множеств

$\in$	является членом
$\subseteq, \subset$	содержится, строго содержится в
$\cup, \cap$	теоретико-множественное объединение, пересечение
$\setminus$	разность двух множеств
$\varnothing$	пустое множество
$\times$	декартово произведение
$\{a \in A \mid \dots\}$	множество всех $a \in A$ со свойством ...
$\{a_i\}_{i \in I}$	множество всех a_i, где $i \in I$
$\|A\|$	мощность A
ω	наименьшее бесконечное порядковое число
$\aleph_0, \aleph_\sigma$	наименьшее и σ-е бесконечные кардинальные числа

Отображения

$\mapsto$	соответствие
$\to$	отображение множеств или классов
$\alpha \mid A$	ограничение гомоморфизма α на подгруппе A
1_A	тождественное отображение группы A
$\operatorname{Ker} \alpha$	ядро отображения α
$\operatorname{Im} \alpha$	образ отображения α
$\oplus \alpha_i, \prod \alpha_i$	прямая сумма и прямое произведение отображений α_i
Δ_G, ∇_G	диагональное и кодиагональное отображения

Теория групп

$o(a)$	порядок элемента a
$e(a)$	экспонента элемента a
$h_p(a)$, $h(a)$, $h^*(a)$	высота и обобщенная высота элемента a
$n \mid a$	n делит a
$\langle\ldots\rangle$, $\langle\ldots\rangle_*$	подгруппа и сервантная подгруппа, порожденные ...
$\lvert A:B\rvert$	индекс подгруппы B в группе A
A/B	факторгруппа
$B+C$, $\sum B_i$	подгруппа, порожденная подгруппами B и C, B_i
$\oplus$, $\bigoplus_{\mathfrak{m}}$	прямая сумма
$\prod$, $\prod_{\mathfrak{m}}$, A^I	прямое произведение
$\oplus_{\mathbf{K}}$	$\mathbf{K}$-прямая сумма
$\cong$	изоморфизм
nA	множество всех элементов вида na, где $a \in A$
$A[n]$	множество всех элементов $a \in A$, для которых $na=0$
$n^{-1}B$	множество всех $a \in A$, для которых $na \in B$
$T(A)$	периодическая часть группы A
$S(A)$	цоколь группы A
$U(A)$, A^1	первая ульмовская подгруппа группы A
A^σ, A_σ	σ-я ульмовская подгруппа и σ-й ульмовский фактор группы A
$u(A)$	ульмовская длина группы A
$f_\sigma(A)$	σ-й инвариант Ульма—Капланского группы A
$r(A)$, $r_0(A)$, $r_p(A)$	ранги группы A
$\operatorname{fin} r(A)$	финальный ранг группы A
$\mathbf{L}(A)$	структура подгрупп группы A
$\hat{A}$	пополнение группы A
$A^\bullet$	копериодическое пополнение группы A

Конкретные группы, кольца

Z	группа целых чисел, бесконечная циклическая группа
$Z(m)$	циклическая группа порядка m
$Z(p^\infty)$	квазициклическая группа
Q	группа всех рациональных чисел
Q_p	группа всех рациональных чисел со знаменателем, взаимно простым с p
$Q^{(p)}$	группа всех рациональных чисел со знаменателями, равными степеням числа p
J_p	группа целых p-адических чисел

$\mathbf{Z}$	кольцо целых чисел
$\mathbf{Q}$	поле рациональных чисел
$\mathbf{Q}_p$	кольцо рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с числом p
$\mathbf{Q}_p^*$	кольцо целых p-адических чисел
$\mathcal{A}$	категория абелевых групп
$\varinjlim$, $\varprojlim$	прямой и обратный пределы
Hom	группа гомоморфизмов
Ext, Pext	группа расширений, сервантных расширений
$\otimes$	тензорное произведение
Tor	периодическое произведение
Char	группа характеров

Предметный указатель

Оглавление

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Л. Фукс

БЕСКОНЕЧНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

том 1

Редактор Г. М. Цукерман, Художник В. С. Акопов

Художественный редактор В. И. Шаповалов. Технический редактор Л. П. Бирюкова

Сдано в набор 30/VIII 1973 г. Подписано к печати 9/I 1974 г.
Бумага № 1 60×90 1/16=10,5 бум. л. 21 усл. п. л.
Уч.-изд. л. 21,77. Изд. № 1/6870. Цена 2 р. 39 к. Зак. 01166

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного знамени Московская типография № 7
«Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9